

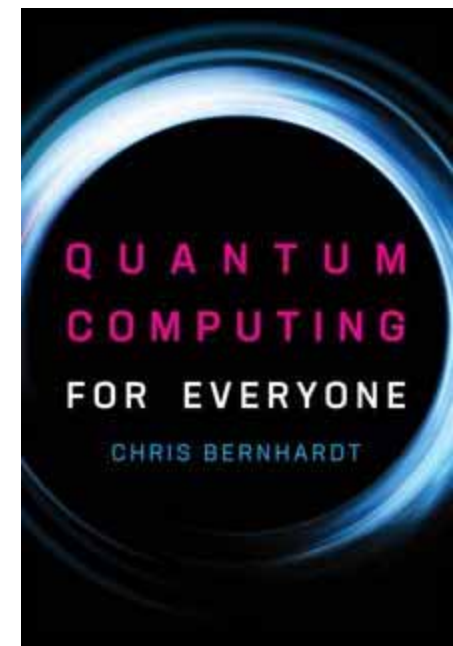
電子デバイス工学特論 令和3年度パワーポイント資料

“Quantum Computing for Everyone”

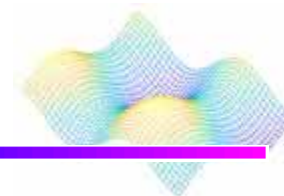
By Chris Bernhardt

MIT Press

ISBN: 9780262039253, March 2019



前書き



授業に参加頂いた学生さんに、パワーポイント資料を用いて紹介頂いた資料をまとめました。

本資料の著作者は皆さんです。著作権は、授業に参加頂いた皆さんにあります。本資料は、皆さんが自由に編集してお使いください。但し、営利目的の転売等はお控えください。

本資料を改訂をされた節は、バージョン番号をファイル名に記載ください("R3電子デバイス特論_ver?.??.pptx")
番号は、0より始まり、1、2、2.7、2.71、2.718...と、指数eに近づくように銘々ください。

それでは、資料作成、有難う御座いました。 (岡田)

1章 スピンについて

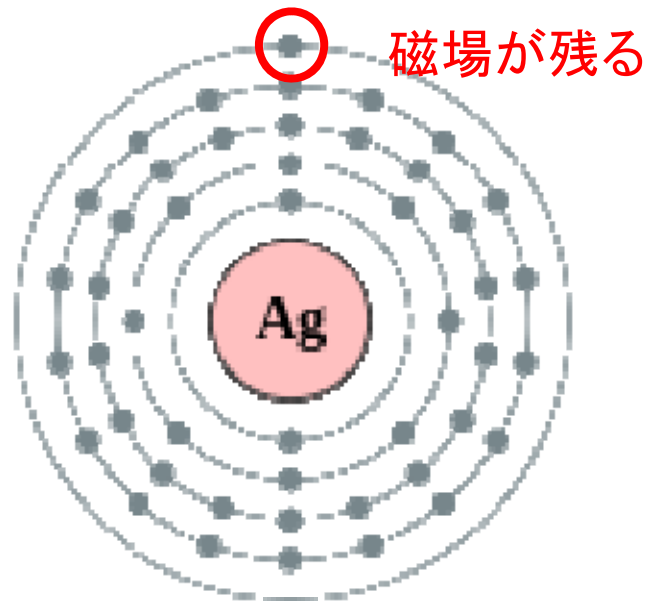


①原子の磁場

電子1つが磁石であるとする

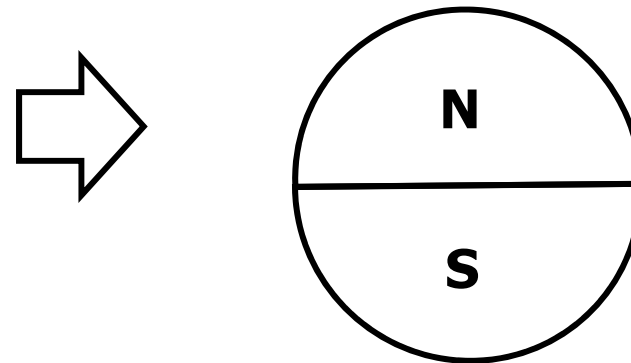
銀原子の場合、

内側の軌道の電子→磁場が打ち消される



銀原子

外側の軌道の電子→磁場が残る



銀原子を磁石とみなせる

②シュテルンとゲルラツハの実験（古典的な予測）

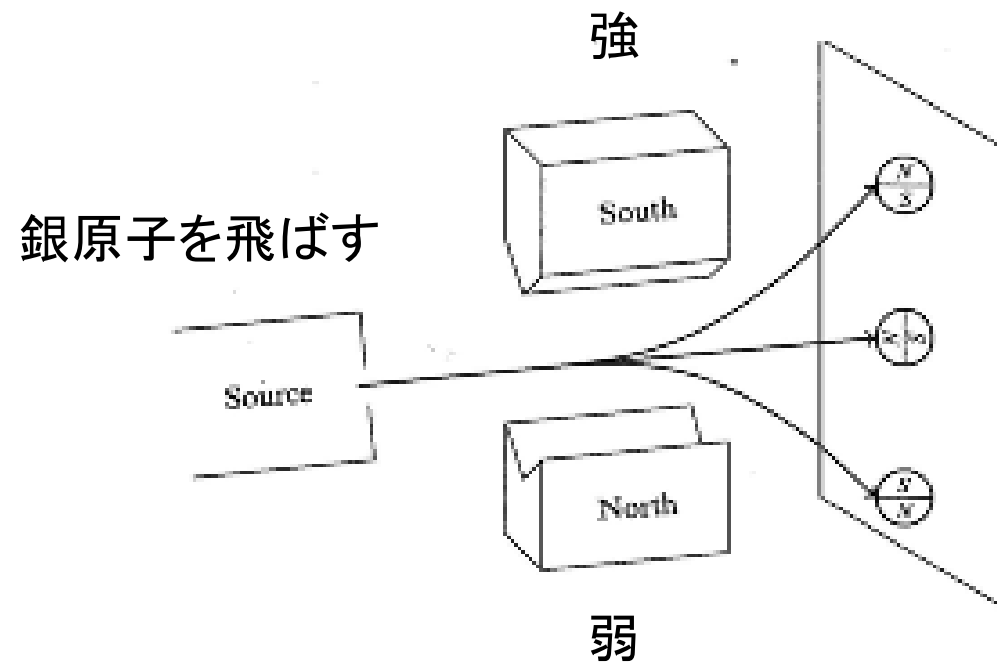
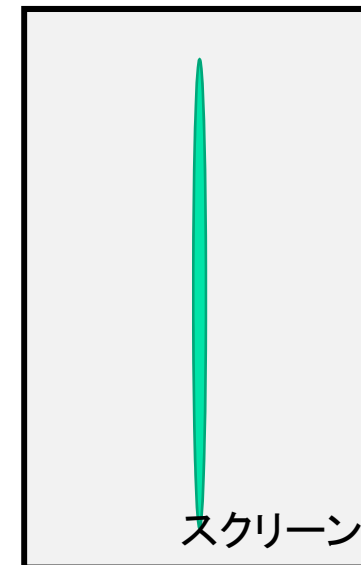


図1



銀原子は実線のように分散するだろう...と予測された

③シュテルンとゲルラッハの実験（実験の結果）

実際には銀原子が2点に偏向し、実線にはならない結果
次の状況をそれぞれ

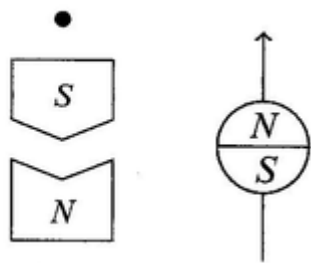


図2

電子が垂直方向に
スピンのNを持つ

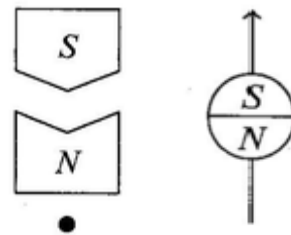
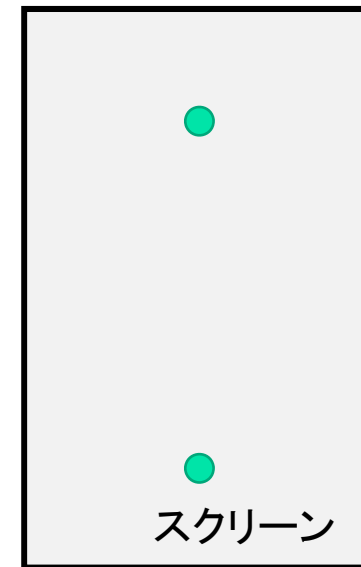


図3

電子が垂直方向に
スピンのSを持つ



銀原子は2点にくっきりと
分かれる

という

④スピンの正しい説明

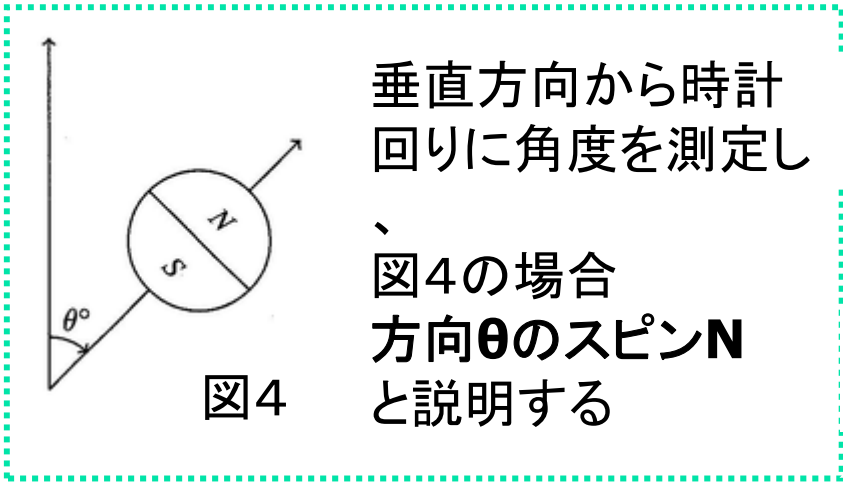


図4

垂直方向から時計回りに角度を測定し、
図4の場合
方向 θ のスピンのN
と説明する

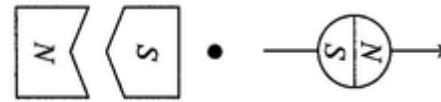


図5

図5の場合
方向 90° のスピンのN

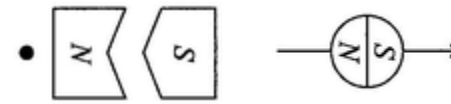


図6

図6の場合
方向 90° のスピンのS

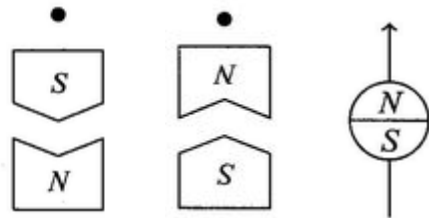


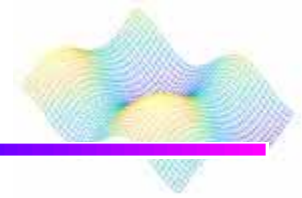
図7

図7の場合
方向 0° のスピンのN または 方向 180° のスピンのS

p.6-10_翻訳



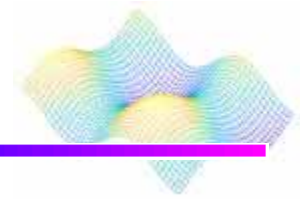
量子時計



標準的位置に時計の文字盤、あなたはそれに質問が出来るだけです。それは針に持っています。しかしながらそれを見てはいけません。単純な質問をするだけです。しかし見ることは出来ません。針が特定の指しているかどうかだけを訪ねることが出来ます。例えば、今針が12を指していたり、4を指しているかどうかを尋ねることが出来ます。さて、これが通常の統計であったら、あなたはイエスの答えを得るのがとても幸運である必要が有ります。ほとんどの場合、針は全く異なる方向を向いています。しかし、量子時計は普通の時計とは異なります。「はい」と答えるか、針があなたが尋ねた方向と反対の方向を向いていることを示します。針が12の方向を示しているかを尋ねるとそれがそうであるか6の方向を向いているか分かります。針が4の方向を向いたかどうか尋ねると、それが正しいか10の方向を指していることが分かります。これは非常に奇妙な状況ですが、電子スピンも全く同じ状況です。

私たちが言ったように、電子スピンは、キュービットの定義を動機づけるアイデアになるでしょう。計算を行う場合は、スピン測定を管理するルールを理解する必要が有ります。先ず、複数回測定したときに何が起こるかを検討します。

同一の方向に測定したとき

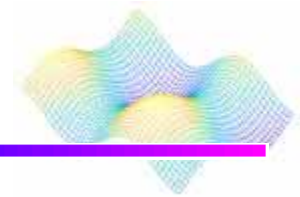


測定は繰り返すことができます。もし同じ測定が繰り返されるならば、同じ結果が得られます。例えば、縦方向の電子スピンを測定しようと考えてください。最初のものと同様に、二つ以上の装置から、繰り返して同じ結果が得られます。一つでは、最初の装置で、上向きに偏向された電子を捕えるために正確に正しい位置に配置されます。もう一つは下向きに偏向した電子を捕えるために配置されます。第一の装置によって上方に偏向された電子は、第二の装置によって上方に偏向され、第一の装置によって下方に偏向された電子は、第二の装置によって下方に偏向されます。これは、実験を繰り返すと、最初はスピンNが 0° の方向にあると測定された電子も、スピンNが 0° の方向にあることを意味します。同様に、電子が最初に 0° の方向にスピンSを持っていると測定され、全く同じ実験を繰り返した場合では、 0° の方向にスピンSが有ります。私たちの時計の例えでは、針が12を指しているかどうかを繰り返し尋ねると、同じ答えが繰り返し得られます。つまり、常に12を指しているか6を指しているかのどちらかです。もちろん、垂直方向について特別なことは何もありません。

θ 方向から測定し、同じ方向に繰り返して測定すると、毎回同じ結果が得られます。最終的には、完全にNで構成される文字列か、または完全にSで構成される文字列になります。

次に考慮すべきことは、同じ測定を繰り返さないとうなるかということです。例えば、最初に垂直方向について測定し、次に水平方向について測定するとどうなりますか？

様々な方向での測定

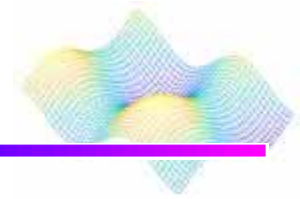


例えば最初に垂直方向に測定し、次に水平方向について測定します。最初の測定器を介して、電子の流れを送ります—垂直方向のスピンを検出します。前と同じように、最初の検出器からくる電子を捕えるために、さらに二つの検出器があります。違いは、二つの検出器が 90° 回転しており、水平方向のスピスが測定されることです。

初めに、最初の検出器により、電子の流れとして情報に偏向する流れを見ます—これらは 0° のスピスNを持ちます。2番目の検出器では、それらの半分がスピスNを持ち、半分が 90° 方向のスピスを持っていることが分かります。 90° 方向の北と南のスピスのシーケンスは完全にランダムです。方向 0° でスピスNを持っていた電子が、方向 90° で再び測定したとき、スピスSまたはNのどちらを持っているかを判断する方法は有りません。同様の結果は、最初の検出器が垂直方向にスピスSを持っていたことを示す電子にも当てはまります—正確に半分はスピス応答でスピスNを持っています。この場合も、 N_s と S_s のシーケンスは完全にランダムです。水平方向で、残りの半分は水平工法にスピスSを持っています。私たちの時計の同様の質問は、針が12の方向を持っているかどうかを尋ね、次に3の方向を持っているかどうかを尋ねています。時計の数が多く、これら二つの質問をする場合、2番目の質問への解答はランダムとなります。時計の半分は、針が3の方向を指していると言ったことを示します。残りの半分は9の方向と言うでしょう。最初の質問への答えは、比較できないとなるでしょう。

最後に、3つの測定を行ったときに何が起こるかを見て行きましょう。最初に垂直方向について測定し、次に水平方向について測定し、次にもう一度垂直方向について測定します。

様々な方向での測定(2)



(続き) 方向 0° のスピン N を持つ最初の検出器からくる電子の流れを考えてみましょう。方向 90° からのスピンを測定すると、それらの半分はスピン N を持ち、半分はスピン S を持ちます。2番目の質問への回答とは関係ありません。測定では、 N に対応する流れでの注意が制限され、3番目の測定では、垂直方向のスピンが測定されます。これら電子のちょうど半分が、スピン N を持っていることが分かります。測定は完全にランダムです。電子が最初に垂直方向にスピンを持っていたと言う事実は、それらが未だ 0° にあり、半分がスピン S を持っているかどうかには関係ありません。もう一度測定すると、 N_s と S_s のシーケンスがスピン N を垂直方向にします。

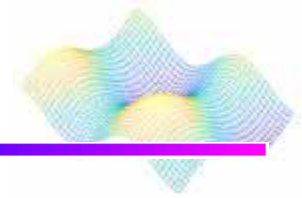
これらの結果から、どの様な結論を導き出すことが出来ますか？ 3つあります。そしてそれらは全て重要です。

まず、全く同じ質問を繰り返し続けると、全く同じ答えが得られます。これは、明確な答えが有る場合があることを示します。すべての質問に対して、ランダムな回答が得られるわけでは有りません。

次に、ランダム性が発生している様です。シーケンスを尋ねると、最後の結果はランダムです。

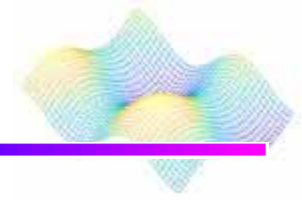
第3に、測定値が結果に影響しています。同じ質問を三回繰り返すと、全く同じ答えが三回得られることが分かりました。但し、最初の質問と三番目の質問が同じで、2番目の質問が異なる場合、最終的な結果はランダムになる可能性が有ります。

様々な方向での測定(3)



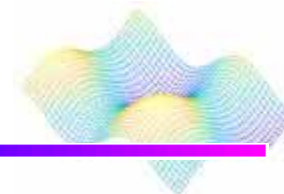
最初と三番目の質問に対するスピンの答えは、同じである必要はありません。例えば、針が12を指しているかどうかを3回尋ねると、毎回、全く同じ答えが得られますが、最初に12を指しているかどうかを尋ねると、3を指しているかどうか分かります。そして、最後にそれが12を指しているかどうかにかかわらず、最初と三番目の質問に対する答えは同じである必要はありません。2つのシナリオの唯一の違いは、2番目の質問に有るため、その質問は次の結果に影響を与える必要が有ります。これらの観察について、測定から始めてもう少し説明します。

測定



古典力学では、空中に投げられたボールの経路を考えるかも知れません。経路は、微積分を利用して計算出来ますが、計算を実行するには、ボールの質量や初速度などの特定の量を知る必要が有ります。これらをどの様に測定するかは、理論の一部では有りません。それらは、既知であると想定しています。暗黙の前提は、測定の行為は問題に取って重要ではないと言うことです。測定を行うことは、モデル化されているシステムに影響を与えないと言うことです。ボールが空中に投げられる例では、これは理にかなっています。例えば、レーダーガンを使用して初速度を測定できます。これには、ボールから光子をバウンスさせることが含まれています。バウンスする光子はボールに影響を与えますが、測定の影響が無視できるように実験を設計できるため、無視することができます。量子力学では、原子や電子のような小さな粒子を検討することが良く有ります。ここで、それから跳ね返る講師は、もはや無視できない効果を持っています。何らかの測定を実行するには、システムと対話する必要が有ります。これらの相互作用は、私たちのシステムを混乱させるので、もはやそれを無視することが出来ません。測定が理論の基本的な構成要素になることは驚くべきことではありませんが、驚くべきことは、これがどの様に行われるかです。例えば、電子のスピンを最初に垂直方向に測定し、次に水平方向に測定する場合を考えてみます。最初の検出器を通過したあと、方向が 0° のスピンNを持つ電子のちょうど半分が、2度目の検出器で測定したときに方向 90° のスピンNを持つことが分かりました。

測定(2)



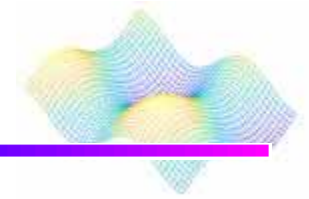
その磁石の強さは、結果になんらかの影響を及ぼしている可能性があります。おそらく、磁石が強すぎて電子の磁気軸がねじれて測定デバイスの磁場と整列している可能性があります。この場合、磁石が弱くなっている可能性が有ります。ねじれが少なくなり、異なる結果が得られる可能性があります。しかし、これは測定が理論に組み込まれる方法ではありません。これから説明する様に、このモデルでは測定の「強度」が考慮されていません。むしろ、システムに影響をあたるのは、測定を行う実際のプロセスです。後で、量子力学でスピンの測定がどの様に扱われるのかをモデル化する数学について説明します。測定が行われるたびに、システムが特定の規定された方法で変更されていることが分かります。これらを規定された方法は、行われる測定のタイプに依存しますが、測定の強度には依存しません。

測定を理論に組み込みこむことは、古典力学と量子力学の違いに関するものです。もう一つの違いはランダム性に関するものです。

1章 p.10-15



ランダム性



古典力学・・・初期条件に依存(ランダム性なし)
測定が対象に与える影響を無視

量子力学・・・電子のスピンや光子の偏光などに影響
(ランダム性あり)
測定が対象に与える影響を考慮

光子と偏光

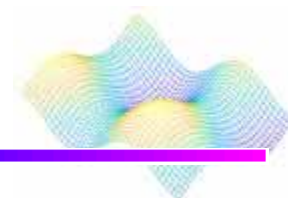


図1.8

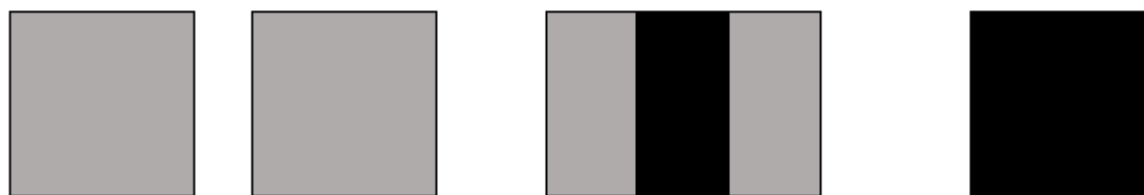


図1.9

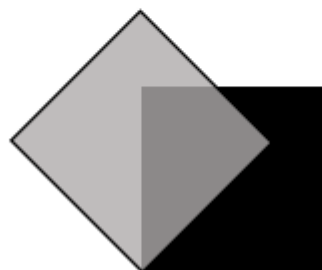
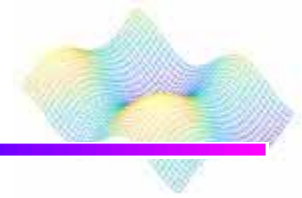


図1.10

P15~20



1章 結論(P15~)



古典ビット → 日常のオブジェクトで表される
(スイッチのオンオフなど)



異なる性質

量子ビット → 電子のスピン, 光の偏光で表される

スピンの測定

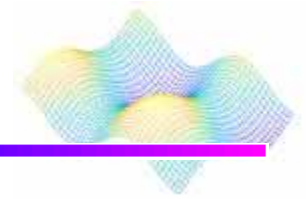
方向を選択 → その方向で測定(量子化)

→ 2つの答えが得られる

古典ビットを割り当てる

例 Nを取得→0見なす Sを取得→1と見なす
測定する→0か1のいずれかが得られる

1章 結論(P15~)



古典的なコンピュータ = 決定論的
関数と初期シードが分かっているならば全く同じ文字列を計算できる
→ 疑似ランダムであって真のランダムではない

NsとSsのランダムな文字列を生成した実験を
量子計算で0と1の文字列として書き直す

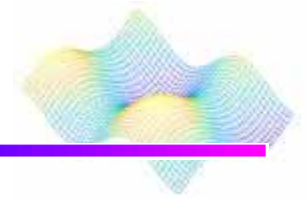


最初に垂直方向に、次に水平方向に電子のスピンを測定すると、
0と1のランダムな文字列が得られる
→ 古典的なコンピュータではできない ← **量子計算の利点**

2章



2章 線形代数(P17~)



量子力学は線形代数に基づいている

一般に無限次元のベクトル空間を使用
スピン, 分極の説明には有限次元でよい → 計算が簡単

計算は平方根と三角関数, 数値の加算と乗算のみ

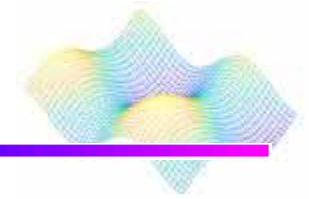
ポール・ディラックの記法

(ポール・ディラック・・・量子力学創設者の一人)

量子力学と量子コンピューティングの両方で広く使用される

実数(10進数)を用いる → 複素数を用いない

複素数と実数 (P17~)



実数 → 10進数 複素数 → 負の平方根を含む

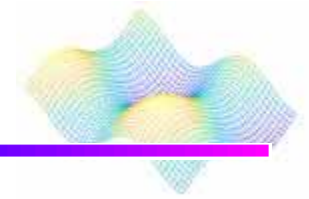
複素数は複雑 実数は簡単に使用できる

複素数ではなにが出来るのか？

- ・3次元のスピンの数学モデルを計算できる
- ・三角関数と指数関数を用いて計算できる
(ショアのアルゴリズムの説明)

これから説明する量子ビットを含む計算では、
スピンを2次元で測定するだけで済む
→ 複素数は必要ない

ベクトル(P19~)



ベクトル・・・数値のリスト

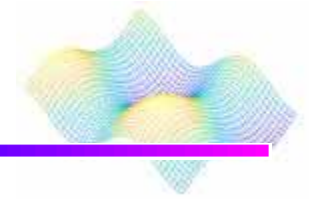
リスト内の数値の数 → ベクトルの次元

ベクトルを構成する数値 → 行列の成分 (entries)

リストが縦に書かれている場合
→ 列ベクトル(ケット)

リストが横に書かれている場合
→ 行ベクトル(ブラ)

ベクトル(P19~)



例

3次元のケット

$$\begin{bmatrix} \textcircled{2} \\ 0.5 \\ -3 \end{bmatrix} \text{成分}$$

4次元のブラ

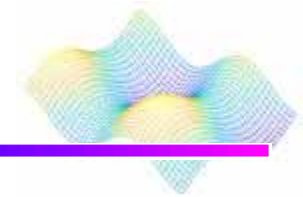
$$\textcircled{1} \textcircled{0} - \textcircled{\pi} \textcircled{23} \text{ 4次元}$$

ケットを v , ブラを w とするとそれぞれ

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \langle w| = [1 \ 0 \ -\pi \ 23]$$

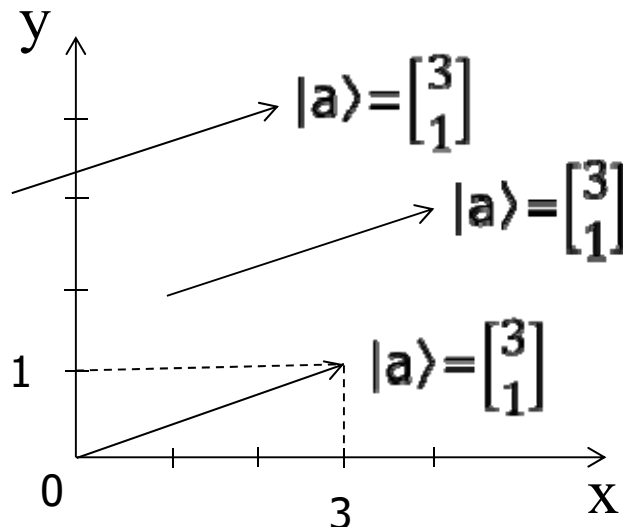
と表すことができる

ベクトル図 (P19~)



2次元, 3次元のベクトルは矢印で書くことができる

例 $|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



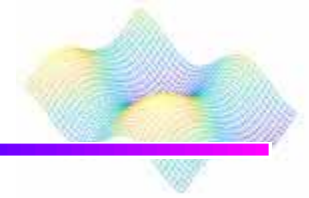
最初の成分は始点から終点までの
x座標の変化を示す

2番目の成分は始点から終点までの
y座標の変化を示す

任意の始点で書くことができる

始点の座標として (a, b) を選択すると、
終点の座標は $(a+3, b+1)$ になる

ベクトルの長さ(P20~)



ベクトルの長さ・・・始点から終点までの距離
→ 行列の成分の2乗和の平方根で求めることができる

ケット $|a\rangle$ の長さ → $\|a\rangle$ と表す

$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ とすると, } \|a\rangle = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

一般化

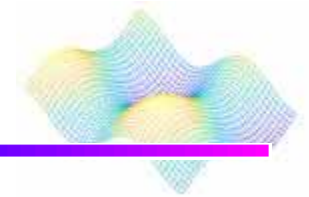
$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ のとき, } \|a\rangle = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

長さ1のベクトル・・・単位ベクトル

線形代数 Linear Algebra



前回の復習



ベクトルの表現

行ベクトル(column vector)はブラ(bra)

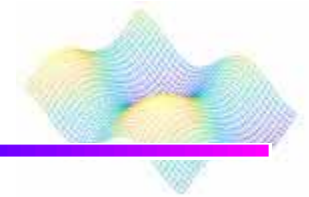
列ベクトル(row vector)はケット(ket)

という

それぞれ w と v を用いて表すと

$$\text{ブラ } \langle w| = [a \ b \ c] \text{ , ケット } |v\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

スカラーの掛け算 Scalar Multiplication



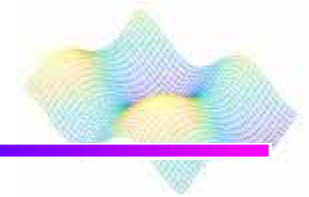
スカラーをベクトルに掛ける

例: ケット $|a\rangle$ にスカラー c を掛ける

$$\text{ケット } |a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad c \times |a\rangle = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}$$

単純に各要素にスカラーをかけるだけ

単位ベクトル unit vector



$$|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{とした時}$$

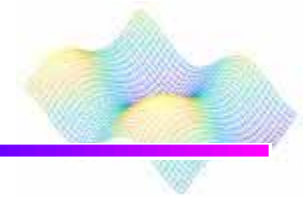
$$||a\rangle| = \sqrt{10}$$

$$\text{ここで}|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \text{としたら}$$

$$||u\rangle| = 1$$

これはaベクトルと同じ方向で大きさが1のベクトル

ベクトルの足し算 Vector Addition



ベクトルが同じ型(ブラとケットが同じ次元)
の場合足し算が出来る

$$\text{例: } |a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, |b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ とした時}$$

$$|a+b\rangle = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{bmatrix}$$

各要素を足し合わせる

ベクトルの足し算 図示(Figure 2.2)

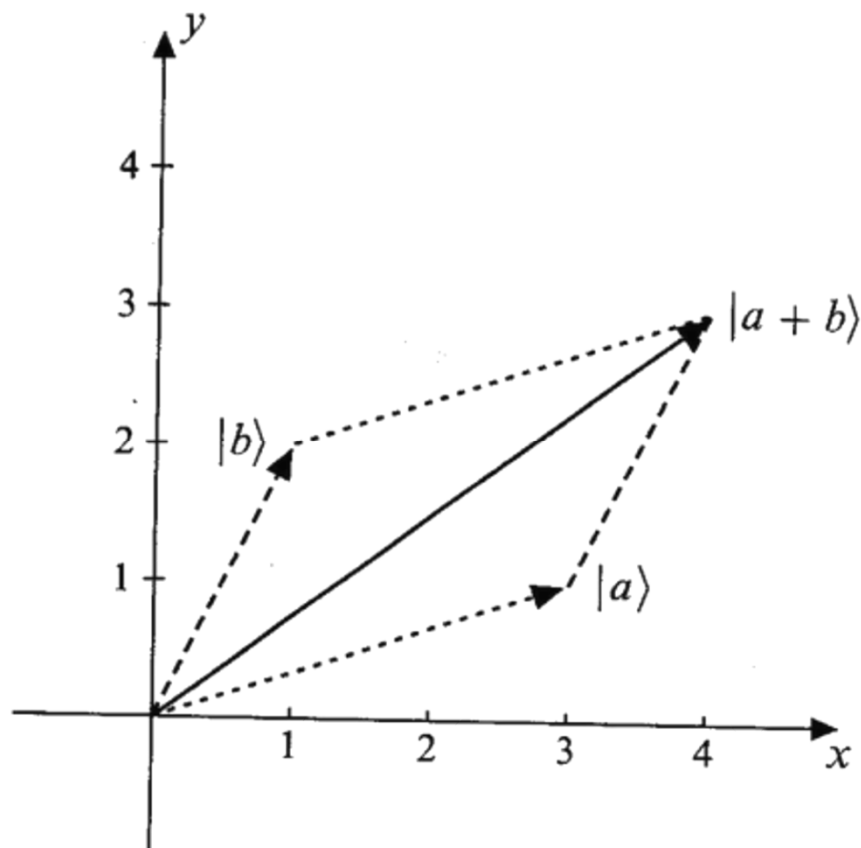
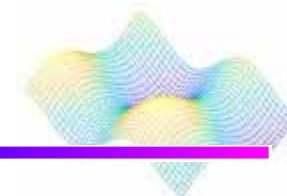
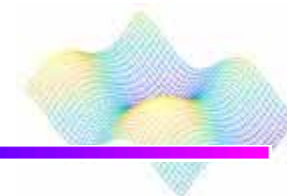


図1 $|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $|b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の足し算

直交ベクトル Orthogonal Vectors



ピタゴラスの定理(直角三角形の場合)

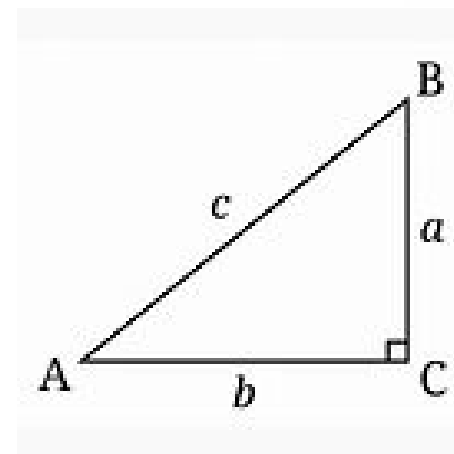
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$|a\rangle$ と $|b\rangle$ が直交している時

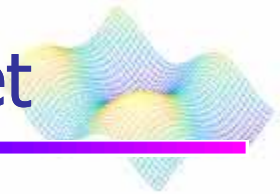
$$\| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 = \| |a+b\rangle \|^2 \quad \text{--- (*)}$$

(*)が成り立つ

また、(*)が成り立つとき $|a\rangle$ と $|b\rangle$ は直交している



ブラとケットの掛け算 Multiplying a Bra by a Ket



$\langle a|$ と $|b\rangle$ の掛け算

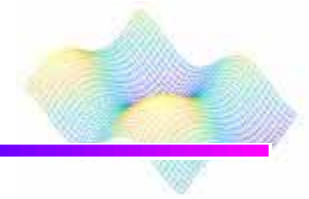
表記: $\langle a|*|b\rangle \rightarrow \langle a||b\rangle \rightarrow \langle a|b\rangle$

例: ブラ $\langle a| = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$ と ケット $|b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ の掛け算

$$\langle a|b\rangle = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

ブラとケットという名前はブラケット(bracket)が由来

ブラケットと長さ Bra-kets and Lengths



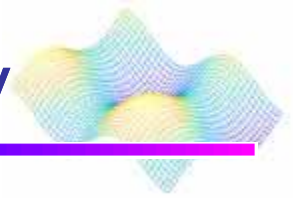
$$\langle a| = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] , \ |a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\langle a|a\rangle = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

$|a\rangle$ の長さは $\sqrt{\langle a|a\rangle}$

単位ベクトルの場合長さは1になる

ブラケットと直交性 Bra-kets and Orthogonality



例: $|a\rangle = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $|b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ と $|c\rangle = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ がある

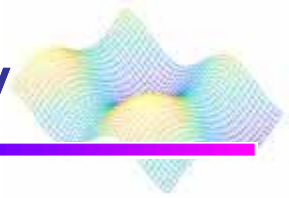
$$\langle a|b\rangle = [3 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$$

$$\langle a|c\rangle = [3 \ 1] \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$\langle a|b\rangle \neq 0$ より $|a\rangle$ と $|b\rangle$ は直交でない

$\langle a|c\rangle = 0$ より $|a\rangle$ と $|c\rangle$ は直交

ブラケットと直交性 Bra-kets and Orthogonality



$$|a\rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \||a\rangle + |b\rangle\|^2 &= [a_1 + b_1 \quad a_2 + b_2] \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} \\ &= (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 \\ &= (a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) + 2(a_1b_1 + a_2b_2) \\ &= \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\|^2 + 2\langle a|b\rangle \end{aligned}$$

$|a\rangle$ と $|b\rangle$ が直交

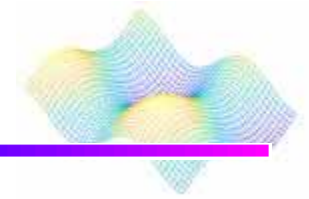
$$\begin{aligned} \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\|^2 &= \||a+b\rangle\|^2 \\ 2\langle a|b\rangle &= 0 \\ \langle a|b\rangle &= 0 \end{aligned}$$

ケットの要素が何個でも成り立つ

P25下7行～P30下8行



【正規直交基底】



2次元のケットを扱う時お互いに直交する2つのケットで構成される

・正規直交基底を形成しているかどうか？

1. 単位ベクトルであるかどうか
2. 直交しているかどうか

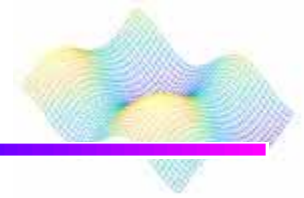
$$\langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_1 \rangle = 1, \langle \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_2 \rangle = 1, \langle \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 \rangle = 0$$

例えば

$$|\mathbf{b}_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\mathbf{b}_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\}$$

【正規直交基底】



・スピンの測定で考える

$$|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\rightarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad |\leftarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad |\nwarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

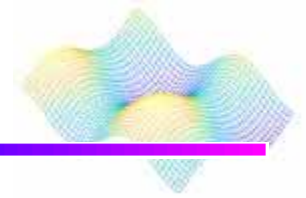
・直交しているので簡潔に表せる

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1, \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1, \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0, \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0,$$

$$\langle\rightarrow|\rightarrow\rangle = 1, \langle\leftarrow|\leftarrow\rangle = 1, \langle\rightarrow|\leftarrow\rangle = 0, \langle\leftarrow|\rightarrow\rangle = 0,$$

$$\langle\nwarrow|\nwarrow\rangle = 1, \langle\nearrow|\nearrow\rangle = 1, \langle\nwarrow|\nearrow\rangle = 0, \langle\nearrow|\nwarrow\rangle = 0$$

【基底ベクトルの線形結合】



- ・任意の2次元のベクトル $|v\rangle$ は $|\uparrow\rangle$ の倍数と $|\downarrow\rangle$ の倍数を足したものと
して書ける
- ・任意の数 c と d に対して

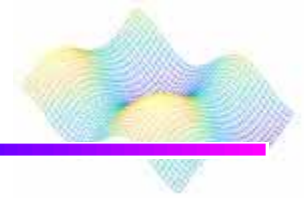
$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり, $x_1 = c, x_2 = d$ という解が唯一の解

- ・次の方程式は任意の数 c, d に対してどのような解を持つか

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = x_1 |\rightarrow\rangle + x_2 |\leftarrow\rangle$$

【基底ベクトルの線形結合】



両辺の左端に $\langle \rightarrow |$ を掛ける

$$\langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \langle \rightarrow | (x_1 | \rightarrow \rangle + x_2 | \leftarrow \rangle)$$

先程の $\langle \rightarrow | \rightarrow \rangle = 1$, $\langle \rightarrow | \leftarrow \rangle = 0$ から x_1 は $\langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ と等しいので

$$x_1 = \langle \rightarrow | \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{c-d}{\sqrt{2}}$$

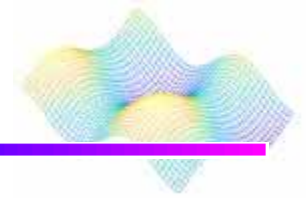
x_2 も同様に $\langle \leftarrow |$ を両辺の左に掛けると

$$x_2 = \frac{c+d}{\sqrt{2}}$$

が求められる
よって

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \frac{c-d}{\sqrt{2}} | \rightarrow \rangle + \frac{c+d}{\sqrt{2}} | \leftarrow \rangle$$

【基底ベクトルの線形結合】



・ n 次元のとき方程式は次のようになる

$$|v\rangle = x_1|b_1\rangle + x_2|b_2\rangle + \cdots + x_i|b_i\rangle + \cdots + x_n|b_n\rangle$$

・ x_i の求め方を示す

両辺に $\langle b_i|$ を掛ける

$\langle b_i|b_k\rangle$ は $i \neq k$ の場合は0, $\langle b_i|b_k\rangle$ は $i = k$ の場合は1ということが分かっている

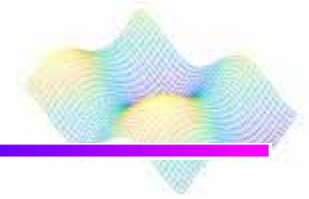
右辺は x_i だけ単純化され $\langle b_i|v\rangle = x_i$ が得られる

よって $|v\rangle$ は基底ベクトルの線形結合として書くことができます

$$|v\rangle = \langle b_1|v\rangle|b_1\rangle + \langle b_2|v\rangle|b_2\rangle + \cdots + \langle b_i|v\rangle|b_i\rangle + \cdots + \langle b_n|v\rangle|b_n\rangle$$

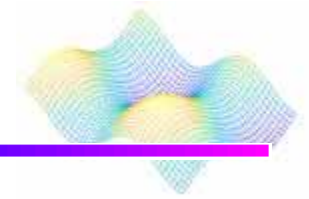
$\langle b_i|v\rangle$ を確率振幅といい, $\langle b_i|v\rangle$ の二乗は $|v\rangle$ が $|b_i\rangle$ に飛び移る確率を示す

【順序基底】



- ・第1のベクトル, 第2のベクトル, \dots というように順序が決められたベクトル
- ・基底ベクトルが $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ である場合,
順序基底を $(|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle)$ と括弧を変更する
- ・すなわち標準基底は $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle) = (|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle)$ となるが
順序基底のときは $(|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle) \neq (|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle)$

【ベクトルの長さ】



基底ベクトルの線形結合の

$$|v\rangle = \langle b_1|v|b_1\rangle + \langle b_2|v|b_2\rangle + \cdots + \langle b_i|v|b_i\rangle + \cdots + \langle b_n|v|b_n\rangle$$

を簡略化するために次のように書く

$$|v\rangle = c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle + \cdots + c_i|b_i\rangle + \cdots + c_n|b_n\rangle$$

$\langle v|v\rangle^2 = \langle v|v\rangle$ と分かっているので、

$\langle v| = c_1\langle b_1| + c_2\langle b_2| + \cdots + c_n\langle b_n|$ を用いると

$$\langle v|v\rangle = (c_1\langle b_1| + c_2\langle b_2| + \cdots + c_n\langle b_n|)(c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle + \cdots + c_n|b_n\rangle)$$

括弧内の項の積は添字が異なるときは0, 等しいときは1なので

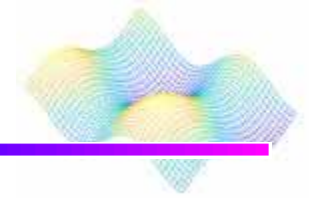
$$\langle v|v\rangle = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_i^2 + \cdots + c_n^2$$

と表すことができる

p30下7行～p36



行列



- ・行列とは
行列は、数や記号や式などを縦と横の長方形に配列したもの
m行n列の行列Mは、 $m \times n$ 行列と呼ばれる。

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

→ 行

↓ 列

行列:例

いくつかの例を示す

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Aには、2行3列があるため、 2×3 の行列
Bには、3行2列があるため、 3×2 の行列

ブラケットは特殊なタイプの行列である
ブラには1行だけ、ケットには1列しかない

行列: 転置行列

- ・転置とは
行列Mの行と列を交換することによって形成される
行列Mの転置は M^T で表される $n \times m$ 行列となる

Mのi番目の行は M^T のi番目の列になり
Mのj番目の列は M^T のj番目の行になる

- ・行列AとBの場合

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

転置



$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

行列: ブラケット表記

列ベクトルは1列のみの行列とみなすことができ

行ベクトルは1行のみの行列とみなすことができる

→ブラ(行)とケット(列)の関係

$$\langle a| = |a\rangle^T, |a\rangle = \langle a|^T$$

複数の行と列を持つ一般的な行列が与えられるとき

行列Aでは2つのブラの積み重ね

行列Bでは2つのケットの並列

$$A = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \end{bmatrix}, \quad \langle a_1| = [1 \quad -4 \quad 2] \quad \langle a_2| = [2 \quad 3 \quad 0]$$

$$B = [|b_1\rangle \quad |b_2\rangle], \quad |b_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad |b_2\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

行列AとBの積はこれらを用いて計算

行列: 行列の積

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} \langle a_1 | \\ \langle a_2 | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1 | b_1 \rangle & \langle a_1 | b_2 \rangle \\ \langle a_2 | b_1 \rangle & \langle a_2 | b_2 \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 - 4 \times 7 + 2 \times 6 & 1 \times 2 - 4 \times 5 + 2 \times 1 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 + 0 \times 6 & 2 \times 2 + 3 \times 5 + 0 \times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & -16 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ブラは常にケットの前に来ることに注意)

行列AとBは、行列Aの列数と行列Bの行数が一致しているときのみ、積ABを定義することができる

行列: 非可換性

一般的に $AB \neq BA$ である

行列の積 AB の時

$m \times r$ の行列 A と $r \times n$ の行列 B が与えられる場合

A を r 次元のブラで記述し、 B を r 次元のケットで記述する

$$A = \begin{bmatrix} \langle a_1 | \\ \langle a_2 | \\ \vdots \\ \langle a_m | \end{bmatrix} \quad B = [|b_1\rangle \quad |b_2\rangle \quad \cdots \quad |b_n\rangle]$$

行列: 非可換性

積 AB は、 i 番目の行と j 番目の列の成分として $\langle a_i | b_j \rangle$ をもつ
 $m \times n$ の行列となる

$$AB = \begin{bmatrix} \langle a_1 | b_1 \rangle & \langle a_1 | b_1 \rangle & \cdots & \langle a_1 | b_j \rangle & \cdots & \langle a_1 | b_n \rangle \\ \langle a_2 | b_1 \rangle & \langle a_2 | b_1 \rangle & \cdots & \langle a_2 | b_j \rangle & \cdots & \langle a_2 | b_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle a_i | b_1 \rangle & \langle a_i | b_1 \rangle & \cdots & \langle a_i | b_j \rangle & \cdots & \langle a_i | b_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle a_m | b_1 \rangle & \langle a_m | b_1 \rangle & \cdots & \langle a_m | b_j \rangle & \cdots & \langle a_m | b_n \rangle \end{bmatrix}$$

乗算の順序を逆にすると BA ($r \times r$ の行列)が得られるが、
 n と r が等しくない場合、 AB の得られる行列は $n \times n$ の行列と
なりサイズが等しくない

r 、 m 、 n がすべて等しい場合でも、 AB と BA は等しくならない

行列: 正方行列と単位行列

- ・正方行列とは
行要素の数と列要素の数が一致する行列
- ・単位行列とは
対角成分に1が並び、他はすべて0となる行列
行列要素を a_{ij} とすると次のようになる

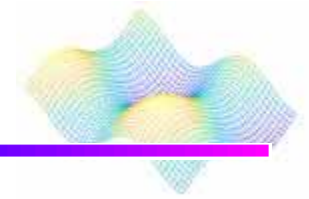
$$a_{ij} = \begin{cases} 1(i = j) \\ 0(i \neq j) \end{cases} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

行列に**単位行列**を掛けることは、数値に**1**を掛けることと類似
行列Aが $m \times n$ の行列であると仮定すると

$$I_m A = A I_n = A$$

となる

行列計算



n 次元のケット $[|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$ のセットが与えられ
これが正規直交基底であるかを確認する

まず

- ・単位ベクトルであることの確認
- ・ベクトルが互いに直交していることを確認

$n \times n$ 行列 $A = [|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$ を作成し
 A の行列の転置をおこなう

$$A^T = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix}$$

行列計算

$$A^T = \begin{bmatrix} \langle b_1 | \\ \langle b_2 | \\ \vdots \\ \langle b_n | \end{bmatrix} \quad A = [|b_1\rangle \quad |b_2\rangle \quad \cdots \quad |b_n\rangle]$$

$A^T A$ を計算すると

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} \langle b_1 | \\ \langle b_2 | \\ \vdots \\ \langle b_n | \end{bmatrix} [|b_1\rangle \quad |b_2\rangle \quad \cdots \quad |b_n\rangle] \\ &= \begin{bmatrix} \langle b_1 | b_1 \rangle & \langle b_1 | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_1 | b_n \rangle \\ \langle b_2 | b_1 \rangle & \langle b_2 | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_2 | b_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle b_n | b_1 \rangle & \langle b_n | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_n | b_n \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

行列計算

$A^T A = I_n$ の場合

ベクトルのセットが正規直交基底である

$$\begin{bmatrix} \langle b_1 | b_1 \rangle & \langle b_1 | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_1 | b_n \rangle \\ \langle b_2 | b_1 \rangle & \langle b_2 | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_2 | b_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle b_n | b_1 \rangle & \langle b_n | b_2 \rangle & \cdots & \langle b_n | b_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

対角成分が1であることを確認し

非対角成分の上(または下)が0であることを確認

$[|b_1\rangle \quad |b_2\rangle \quad \cdots \quad |b_n\rangle]$ は正規直交基底である

行列計算: 基底ベクトルの線形結合

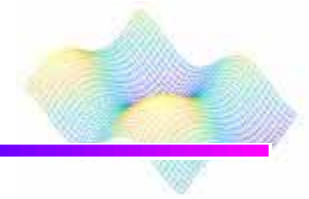
$[|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$ は正規直交基底でケット $|v\rangle$ が与えられるとき基底ベクトルの線形結合として表現したい

$$|v\rangle = \langle b_1|v\rangle|b_1\rangle + \langle b_2|v\rangle|b_2\rangle + \cdots + \langle b_i|v\rangle|b_i\rangle + \cdots + \langle b_n|v\rangle|b_n\rangle$$

A^T を用いると

$$A^T |v\rangle = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix} |v\rangle = \begin{bmatrix} \langle b_1|v\rangle \\ \langle b_2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n|v\rangle \end{bmatrix}$$

直交行列とユニタリ行列



- ・直交行列

$M^T M$ が単位行列に等しいという特性を持つ正方行列 M を直交行列と呼ぶ

直交行列は、量子理論ゲートを見るときにも重要

直交行列とユニタリ行列

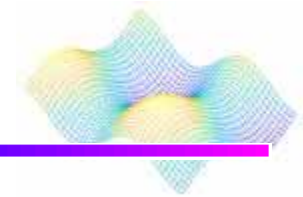
2つの重要な直交行列を次のように示す

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- ・ 2×2 の行列は、順位付けられた基底 ($|\leftarrow\rangle, |\rightarrow\rangle$) に対応
- ・ 4×4 の行列は、 \mathbf{R}^4 の標準基底をとり、最後の2つのベクトルを交換して順位付けすることに対応
この行列は、CNOTゲートに関係している
- ・複素数成分を持つ行列はユニタリ行列と呼ばれる

すべての量子回路はこれら2種類のゲートで構成される

線形代数ツールボックス



繰り返し実行する必要がある3つの項目

- (1) n 次元のケットのセット $\{|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle\}$ が与えられた場合、それが正規直交基底であるかどうかを確認します

$$A^T = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix} \quad A = [|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$$

$A^T A$ が単位行列である場合、正規直交基底

$$\begin{bmatrix} \langle b_1|b_1\rangle & \langle b_1|b_2\rangle & \cdots & \langle b_1|b_n\rangle \\ \langle b_2|b_1\rangle & \langle b_2|b_2\rangle & \cdots & \langle b_2|b_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle b_n|b_1\rangle & \langle b_n|b_2\rangle & \cdots & \langle b_n|b_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = I_n$$

線形代数ツールボックス

(2) $[|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$ は正規直交基底でケット $|v\rangle$ が与えられる基底ベクトルの線形結合として表現したい

$$|v\rangle = x_1|b_1\rangle + x_2|b_2\rangle + \cdots x_i|b_i\rangle \cdots + x_n|b_n\rangle$$

$$A = [|b_1\rangle \ |b_2\rangle \ \cdots \ |b_n\rangle]$$

A^T を用いると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^T |v\rangle = \begin{bmatrix} \langle b_1| \\ \langle b_2| \\ \vdots \\ \langle b_n| \end{bmatrix} |v\rangle = \begin{bmatrix} \langle b_1|v\rangle \\ \langle b_2|v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n|v\rangle \end{bmatrix}$$

線形代数ツールボックス

- (3) 正規直交基底 $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_n\rangle\}$ と
 $|v\rangle = c_1|b_1\rangle + c_2|b_2\rangle + \dots + c_i|b_i\rangle + \dots + c_n|b_n\rangle$
が与えられるときの、 $|v\rangle$ の長さを求める

$$\|v\rangle|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_i^2 + \dots + c_n^2$$

ツールができたので、スピンの研究に戻ります

3章

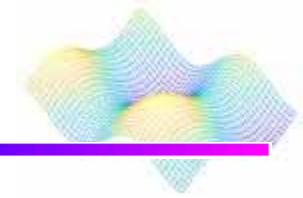


目的



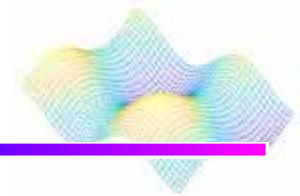
- この章では, スピンの測定を行うChapter1と線形代数のChapter2を用いて, スピンの測定の解説できる数学的なモデルを示すことが目標である.
- このモデルは量子ビットに関連しているものであるが, どのように関連しているのかを説明している.
 1. 0° 方向のスピンを計測するとスピンN極またはスピンS極という結果が得られるため, その結果は両方に関連する確率が得られる.
 2. 電子が 0° 方向でスピンN極を持っていることがわかっているとき, 同じ方向から測定すると結果はスピンN極になる.
 3. 一方でスピンN極が 90° 方向と分かっていた場合に 0° 方向から測定すると, 結果はスピンS極になる.
 4. よって 0° 方向から測定した際にはスピンN極, S極が得られる確率はそれぞれ50%になる.

量子スピンの数学



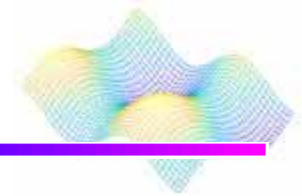
- 量子スピンの数学的モデルは確率とベクトルの両方を使用している.
- このスピンの測定結果は2つなので, ベクトル空間は2次元である. このベクトル空間を \mathbb{R}^2 とする.
- このベクトル空間は2次元空間であるため, 3次元回転を考慮する場合は虚数成分のベクトルを使って考える. この場合のベクトル空間を \mathbb{C}^2 とし, \mathbb{C}^2 は複素空間である.
- 今回のスピンは2次元回転であるため, \mathbb{R}^2 が量子スピンの数学的モデルに適している.

P38～P40 量子スピンの数学



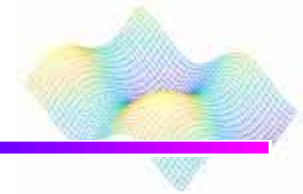
- R^2 の単位ベクトルについて考える. 状態ベクトルを考慮すると, 単位ベクトル $|v\rangle = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ となる. また, $C_1^2 + C_2^2 = 1$ の形式の状態ベクトルの制限がある.
- スピンの方向は正規直交規定 $[|b_1\rangle, |b_2\rangle]$ に対応しており, 基底の二つのベクトルは測定できる二つの結果と対応している. 電子のN極は最初の基底ベクトルと, S極は二番目の基底ベクトルに対応している.
- 粒子は $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ の線形結合によってスピン状態になる. つまり $C_1|b_1\rangle + C_2|b_2\rangle$ の形式になる. これを状態ベクトルと呼ぶ.
- 測定後に状態ベクトルは $|b_1\rangle$ または $|b_2\rangle$ にジャンプすることがある.

P38～P40 量子スピンの数学



- 測定することで状態ベクトルは変化する. 変化した新しい状態ベクトルは、測定に関する規定ベクトルの一つになる.
- 特定の基底ベクトルを得る確率は初期状態によって決定する. また $|b_1\rangle$ となる確率は C_1^2 , $|b_2\rangle$ となる確率は C_2^2 である.
- C_1, C_2 はともに確率振幅である. 確率振幅自体は確率を示しておらず, 確率振幅は正, または負の値を取る. 確率振幅を二乗することで確率が得られる.

P38～P40 量子スピンの数学



- 垂直方向のスピンの測定に対応する正規直交規定は、
($|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$)で表すことができる。

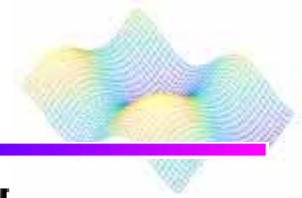
このとき $|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $|\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。

- 基底ベクトルに指定されている初めのベクトルは 0° 方向のスピンのN極の電子, 次のベクトルは 0° 方向のスピンのS極の電子に対応している。
- 水平方向のスピンの測定に対応する正規直交規定は、
($|\rightarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$)で表すことができる。

このとき $|\rightarrow\rangle = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $|\leftarrow\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ である。

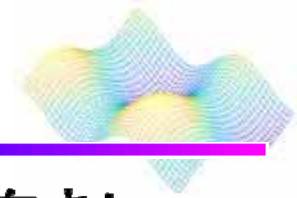
- 初めのベクトルは 90° 方向のスピンのN極の電子, 次のベクトルは 90° 方向のスピンのS極の電子に対応している。

P38～P40 量子スピンの数学



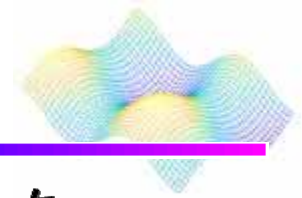
- 垂直方向のスピンを測定する。電子のスピン状態がわからないため単位ベクトルを用いることで、 $C_1|\uparrow\rangle + C_2|\downarrow\rangle$ で表すことができる。ここで、 $C_1^2 + C_2^2 = 1$ である。
- 測定を行うと、電子が上向きにそらされて、 $|\uparrow\rangle$ の状態に移るか、電子が下向きにそらされて、 $|\downarrow\rangle$ の状態に移る。この時、上向きの状態に移る確率が C_1^2 、下向きに移る確率が C_2^2 である。

P38～P40 量子スピンの数学



- 垂直方向の電子のスピンの状態を測定し、電子が上向きに移ったと仮定すると、スピンの状態は、 $|\uparrow\rangle = 1|\uparrow\rangle + 0|\downarrow\rangle$ である。再度垂直方向のスピンを測定を行う時、電子が上向きに移る確率は $1^2 = 1$ であり、下向きに移る確率は $0^2 = 0$ である。よって、何度測定しても上向きに移る結果が得られる。
- 垂直方向の電子のスピンの状態を測定し、電子が下向きに移ったと仮定すると、スピンの状態は、 $|\downarrow\rangle = 0|\uparrow\rangle + 1|\downarrow\rangle$ であるため、何度垂直方向のスピンを測定しても、下向きに移る結果が得られる。

P38～P40 量子スピンの数学

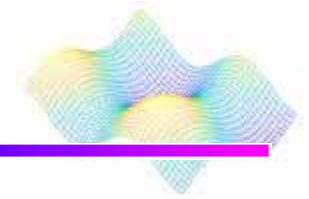


- 垂直方向のスピンを測定した後に、水平方向のスピンを測定する場合を考える.
- 垂直方向のスピンを測定し、スピンN極が 0° にあると仮定すると、状態ベクトルは $|\uparrow\rangle$ になる. 次に、水平方向のスピンを測定するために、水平方向に対応する正規直交規定でベクトルを表す必要がある. つまり
$$|\uparrow\rangle = x_1 |\rightarrow\rangle + x_2 |\leftarrow\rangle$$
 を解くための x_1, x_2 を求める必要がある.
- ここで、 x_1, x_2 を求めるために、2章の最後に示したツールボックスの内二つ目の物を扱う.

同等の状態ベクトル



同等の状態ベクトル



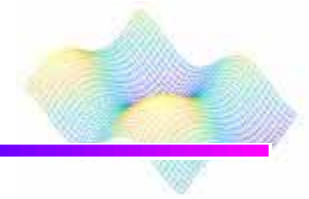
いくつかの電子が与えられ、それらのスピンの
 \uparrow または $-\uparrow$ のいずれかによって与えられると仮定
します。

\uparrow と $-\uparrow$ 状態を区別するための測定はあるのか？



ない

例1

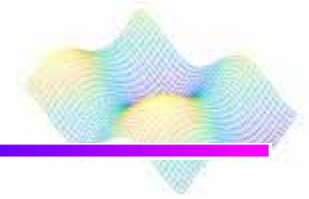


私たちの電子が状態 $|\uparrow\rangle$ を持っていると仮定する

$$\text{方程式 } |\uparrow\rangle = a|b1\rangle + b|b2\rangle$$

測定を行うと、スピンのNになる確率は $a^2 = (-a)^2$ であり、
スピンのSになる確率は
 $b^2 = (-b)^2$

例2



私たちの電子が状態- $|\uparrow\rangle$ を持っていると仮定する

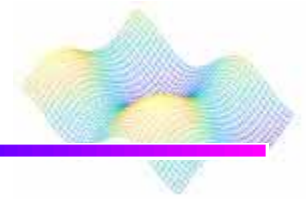
$$\text{方程式} - |\uparrow\rangle = -a |b1\rangle - b |b2\rangle$$

測定を行うと、スピンのNになる確率は

$$a^2 = (-a)^2 \text{であり、}$$

スピンのSになる確率は

$$b^2 = (-b)^2$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, -\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle,$$

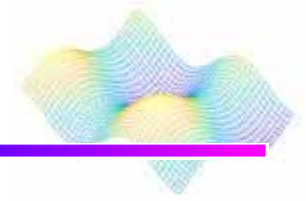
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle, -\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

上記の4つの状態のうち

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \text{ と } -\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

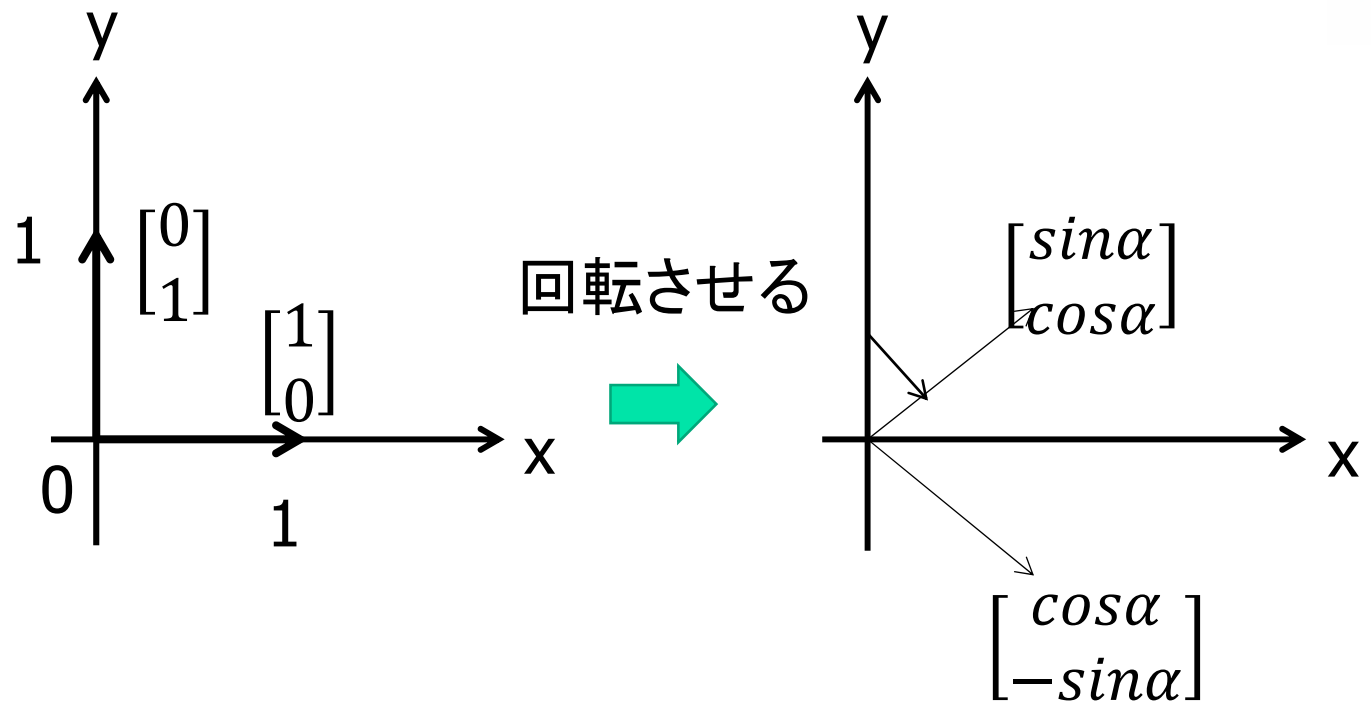
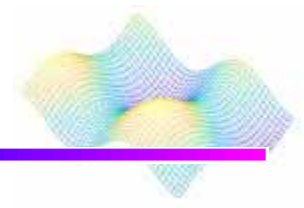
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \text{ と } -\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

は同等である



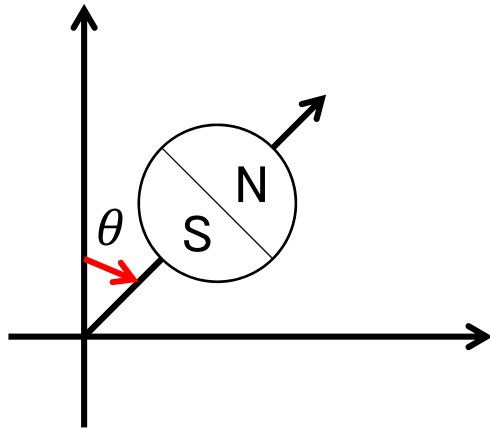
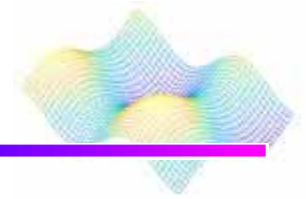
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \text{ と } \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \text{ と } -\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

方向が区別できるので、同等ではない



この α が 90° となると $\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ と表される

これをさらに 90° 回転させると元の状態に戻る



$$\begin{bmatrix} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) & \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) & \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix}$$

α は 0° から 90° になると回転したベースのセットになる
 θ は 0° から 180° 回転させるとベースのセットになる

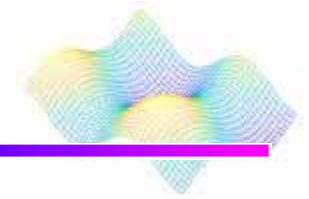
θ が 180° または同等になると、 α が 90° で測定された
 N と S が入れ替わった状態になる

$\therefore \theta = 2\alpha$ が成り立つ

スピンとキュービット



光子の偏光の数理モデル



スピン → 偏光

$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$: 基準基底

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$: 垂直偏光

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: 水平偏光

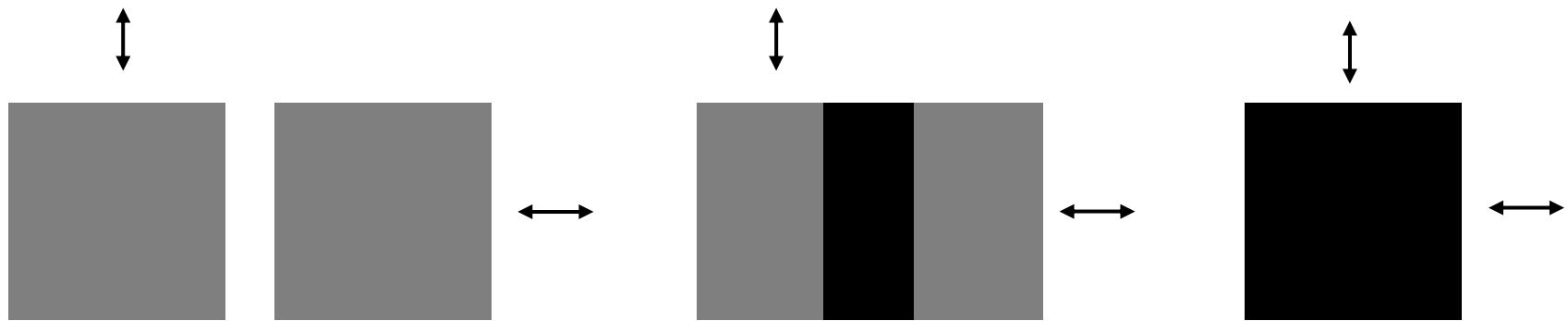
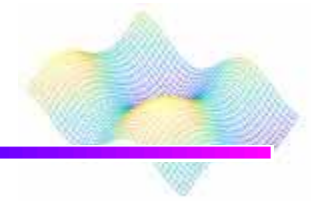
$|i\rangle$: 光子の偏光状態

$|i\rangle = \alpha_i |h_i\rangle + \beta_i |v_i\rangle$

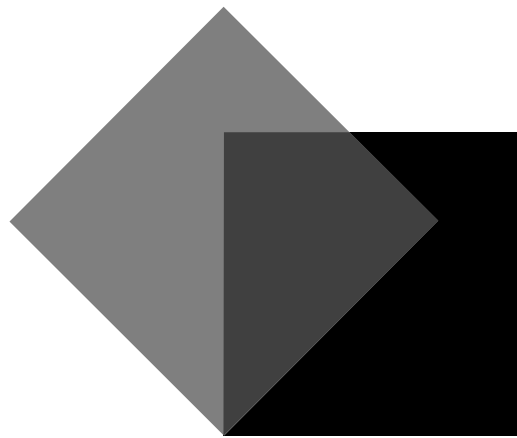
$\left(\begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ -\sin(\beta) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}\right)$

: 偏光板を β 回転させたときの正規直交基底

偏光板を用いた実験

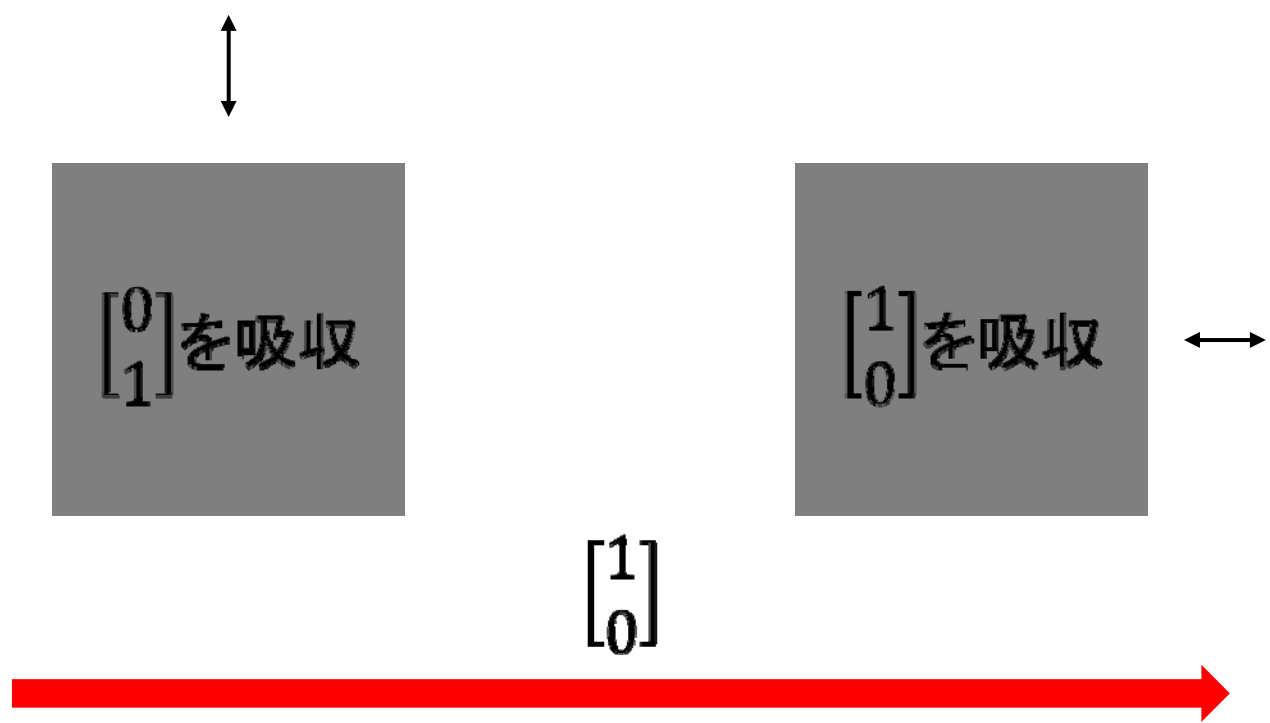
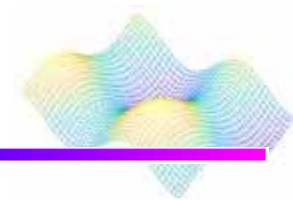


偏光板2枚

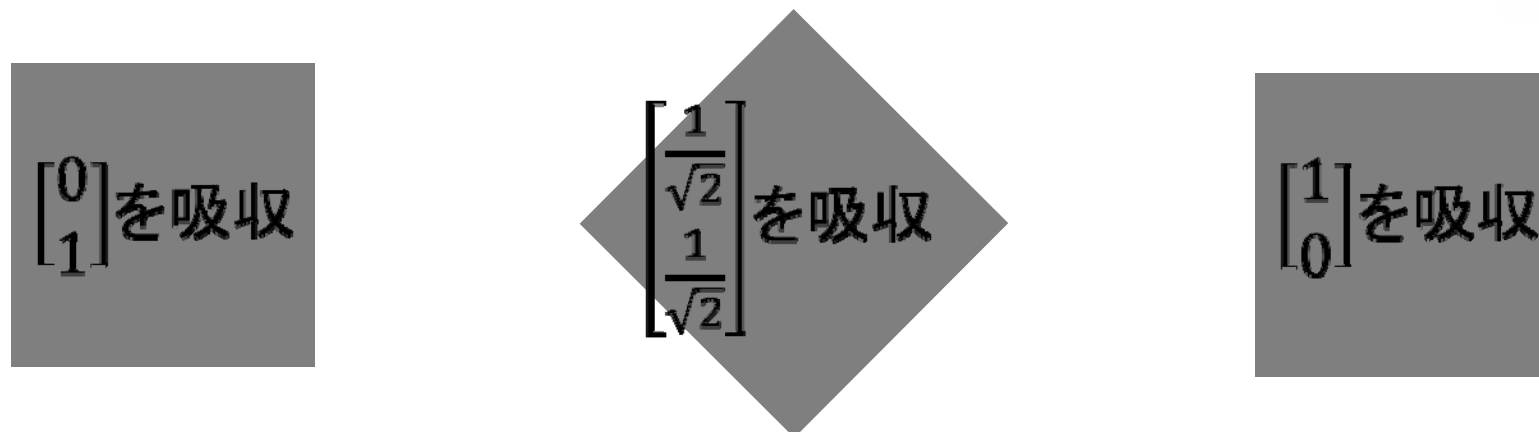
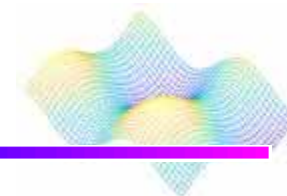


偏光板3枚

偏光板を用いた実験(2枚)



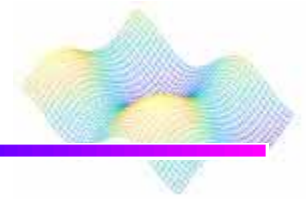
偏光板を用いた実験(3枚)



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

透過する確率 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

キュービット



キュービット(qubit,量子ビット):
quantum+bit, \mathbb{R}^2 の任意の単位ケット

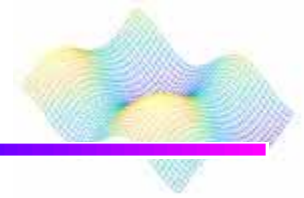
従来のコンピュータは0,1の表現であったが、
量子コンピュータでは量子の重ね合わせを用いて表現

電子デバイス工学特論

p.50下13行~p.55



アリス, ボブ, イブ



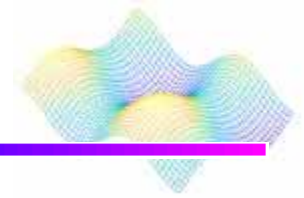
アリス(送信者)

秘密のメッセージ

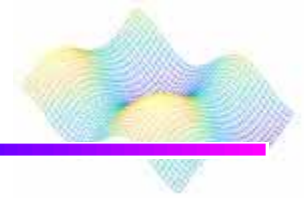


ボブ(受信者)

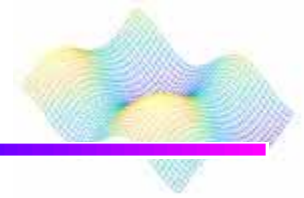
アリス, ボブ, イブ



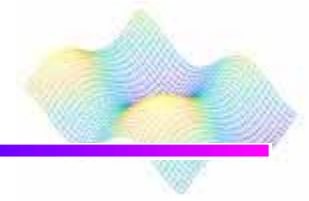
アリス, ボブ, イブ



アリス, ボブ, イブ

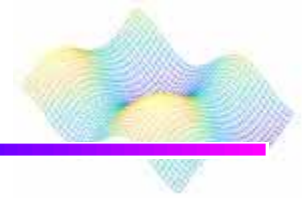


目次



1. 量子ビットの送受信
2. 確立振幅と干渉
3. BB84プロトコル

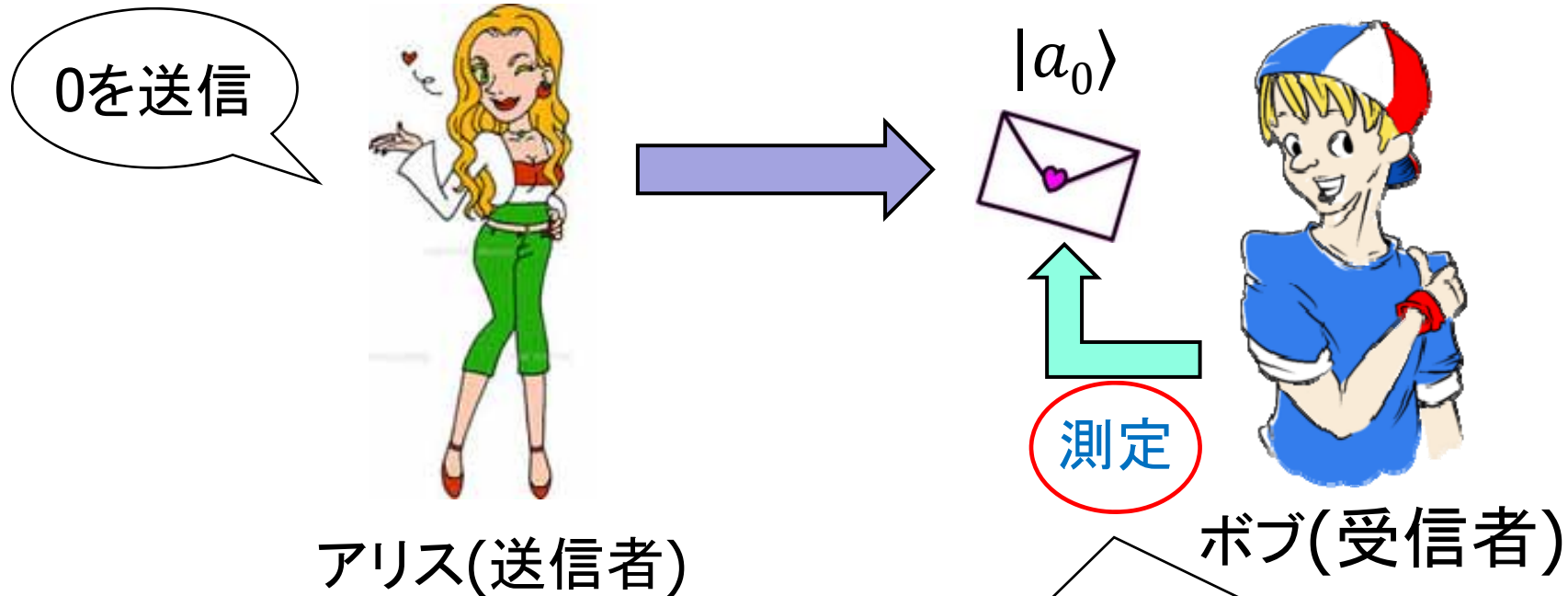
量子ビットの送受信



- 量子ビットの送受信には、正規直交基底を使用

アリス: $(|a_0\rangle, |a_1\rangle)$

ボブ : $(|b_0\rangle, |b_1\rangle)$

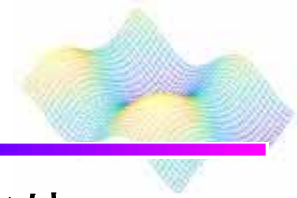


測定結果: $|a_0\rangle = d_0|b_0\rangle + d_1|b_1\rangle$

d_0^2 の確立で $|b_0\rangle$ となり, 0を受信

d_1^2 の確立で $|b_1\rangle$ となり, 1を受信

量子ビットの送受信



アリスとボブが 0° , 120° , 240° の電子スピンの測定に対応しており、3つの内ランダムに、アリスは 240° , ボブは 120° 方向に測定するとする

θ 方向正規直交基底 $\left(\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right)$ から

アリスの基底: $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) \quad \because (\text{ケット}) \times -1$

ボブの基底 : $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right)$

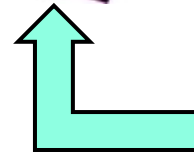
0を送信



アリス(送信者)



$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

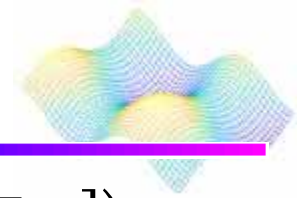


測定



ボブ(受信者)

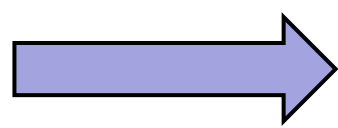
量子ビットの送受信



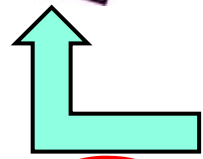
アリスの基底: $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right)$

ボブの基底: $\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right)$

0を送信



$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$



測定



アリス(送信者)

ボブ(受信者)

測定結果

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} + \sqrt{3}/2 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

ボブの基底ベクトル
のブラからなる行列

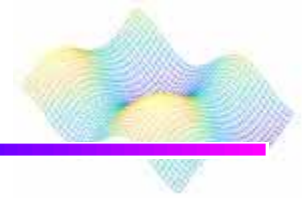
アリスの
量子ビット

計算結果

0

1

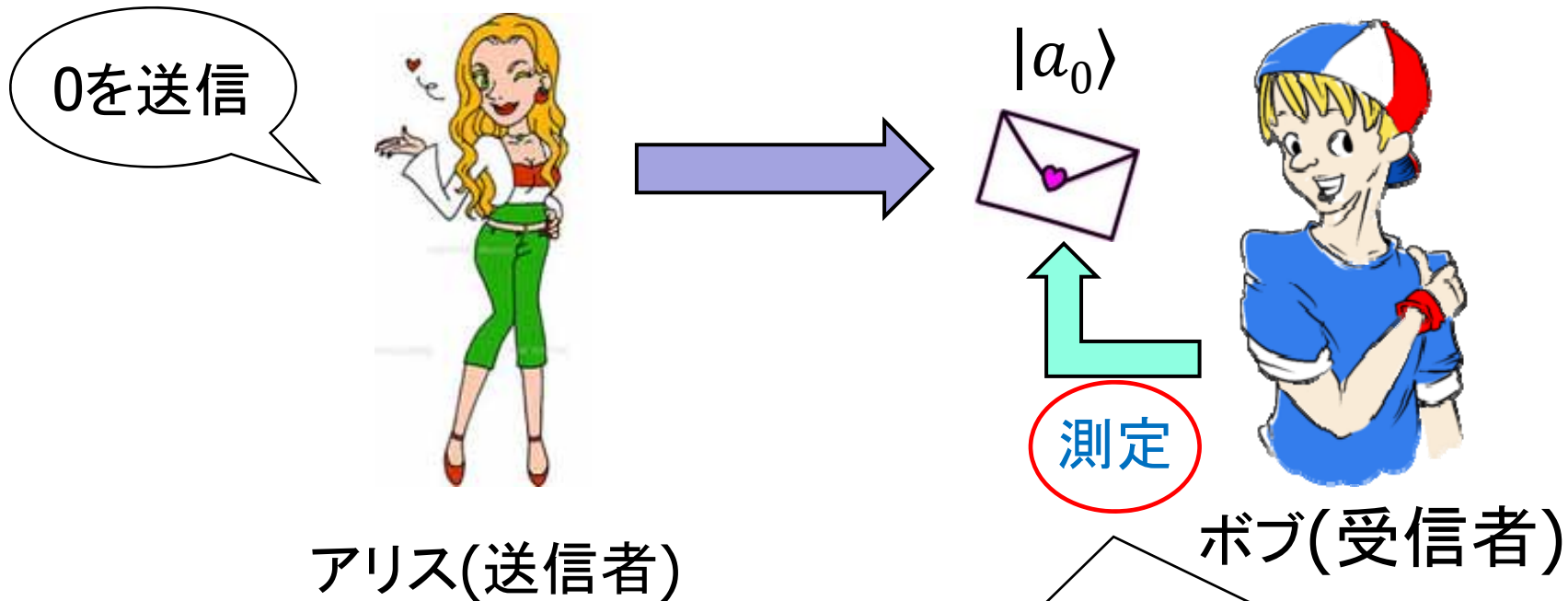
量子ビットの送受信



- 量子ビットの送受信には, 正規直交基底を使用

アリス: $(|a_0\rangle, |a_1\rangle)$

ボブ : $(|b_0\rangle, |b_1\rangle)$

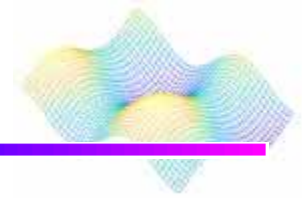


測定結果: $|a_0\rangle = d_0|b_0\rangle + d_1|b_1\rangle$

d_0^2 の確立で $|b_0\rangle$ となり, 0を受信

d_1^2 の確立で $|b_1\rangle$ となり, 1を受信

量子ビットの送受信



基本形

$$|a_0\rangle = d_0 |b_0\rangle + d_1 |b_1\rangle$$

0 1

d_0^2 の確立で $|b_0\rangle$ となり, 0を受信
 d_1^2 の確立で $|b_1\rangle$ となり, 1を受信

計算結果

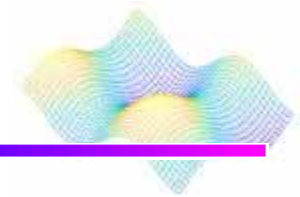
$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} + \sqrt{3}/2 \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

0 1

$(-1/2)^2 = \frac{1}{4}$ の確立で0を受信

$(\sqrt{3}/2)^2 = \frac{3}{4}$ の確立で1を受信

量子ビットの送受信



基本形

$$|a_0\rangle = d_0 |b_0\rangle + d_1 |b_1\rangle$$

0 1

d_0^2 の確立で $|b_0\rangle$ となり, 0 を受信

d_1^2 の確立で $|b_1\rangle$ となり, 1 を受信

計算結果

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$

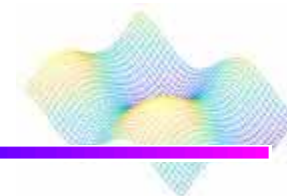
0 1

このときの d_0, d_1 を
確立振幅という

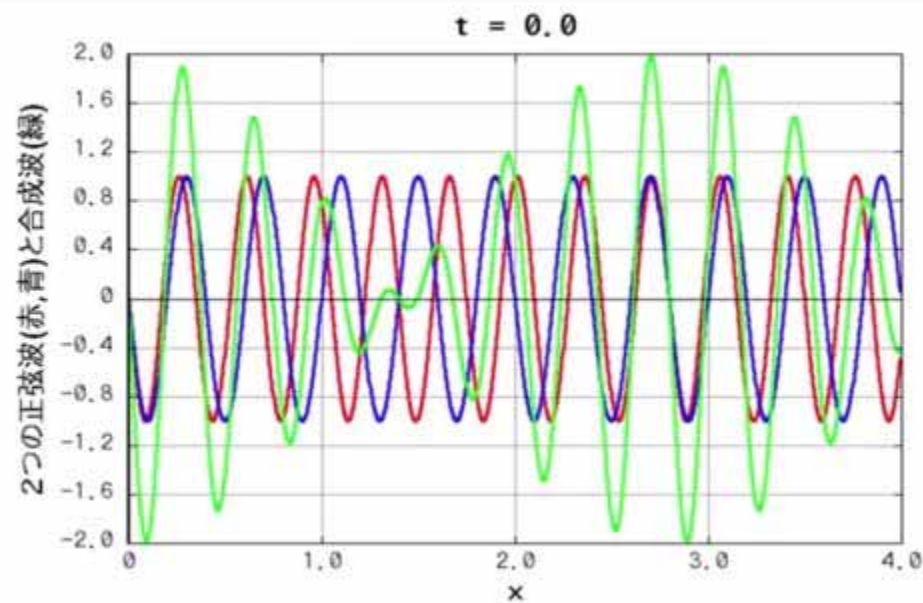
$(-1/2)^2 = \frac{1}{4}$ の確立で 0 を受信

$(\sqrt{3}/2)^2 = \frac{3}{4}$ の確立で 1 を受信

確立振幅と干渉

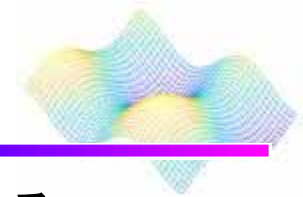


干渉とは... 2つ以上の波が重なるとき、
位相差によって強め合ったり
弱め合ったりする現象



正弦波の重ね合わせ

確立振幅と干渉



例として, $|v\rangle$ を $|\leftarrow\rangle$, $|\rightarrow\rangle$ で表す量子ビットで考える

$|\leftarrow\rangle$ と $|\rightarrow\rangle$ のどちらを測定しても

1/2の確立で $|\uparrow\rangle$ (量子ビット:0)

1/2の確立で $|\downarrow\rangle$ (量子ビット:1)の結果が得られる

2つの量子ビットの重ね合わせをとると,

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\leftarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\rightarrow\rangle$$

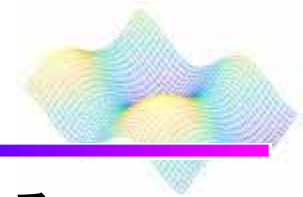
$\because |v\rangle$ を水平に測定すると $|\leftarrow\rangle$ と $|\rightarrow\rangle$ の
どちらかを1/2で得られるが,
垂直に測定すると0しか得られない

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\because |\leftarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\rightarrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

つまり, 0は強め合い, 1は弱め合う

確立振幅と干渉



例として, $|v\rangle$ を $|\leftarrow\rangle$, $|\rightarrow\rangle$ で表す量子ビットで考える

$$|v\rangle = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

0は強め合い, 1は弱め合う

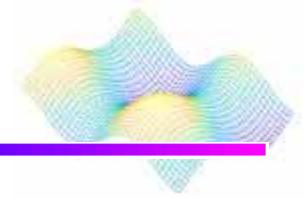
この特徴が量子アルゴリズムでは重要
線形結合を慎重に選択することにより,
必要ない条件を弱め, 必要ある条件を増幅させる

1つの量子ビットで出来ることは限られているが,
アリスとボブが安全に通信できるようにすることが出来る



BB84プロトコル

BB84プロトコル



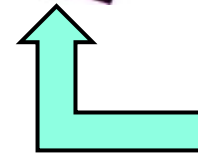
BB84プロトコル... チャールズ・ベネット(Charles Bennett),
ジル・ブラッサード(Gilles Brassard)が1984年に発明



アリス(送信者)



量子ビット

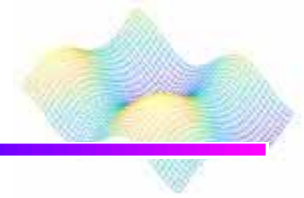


測定

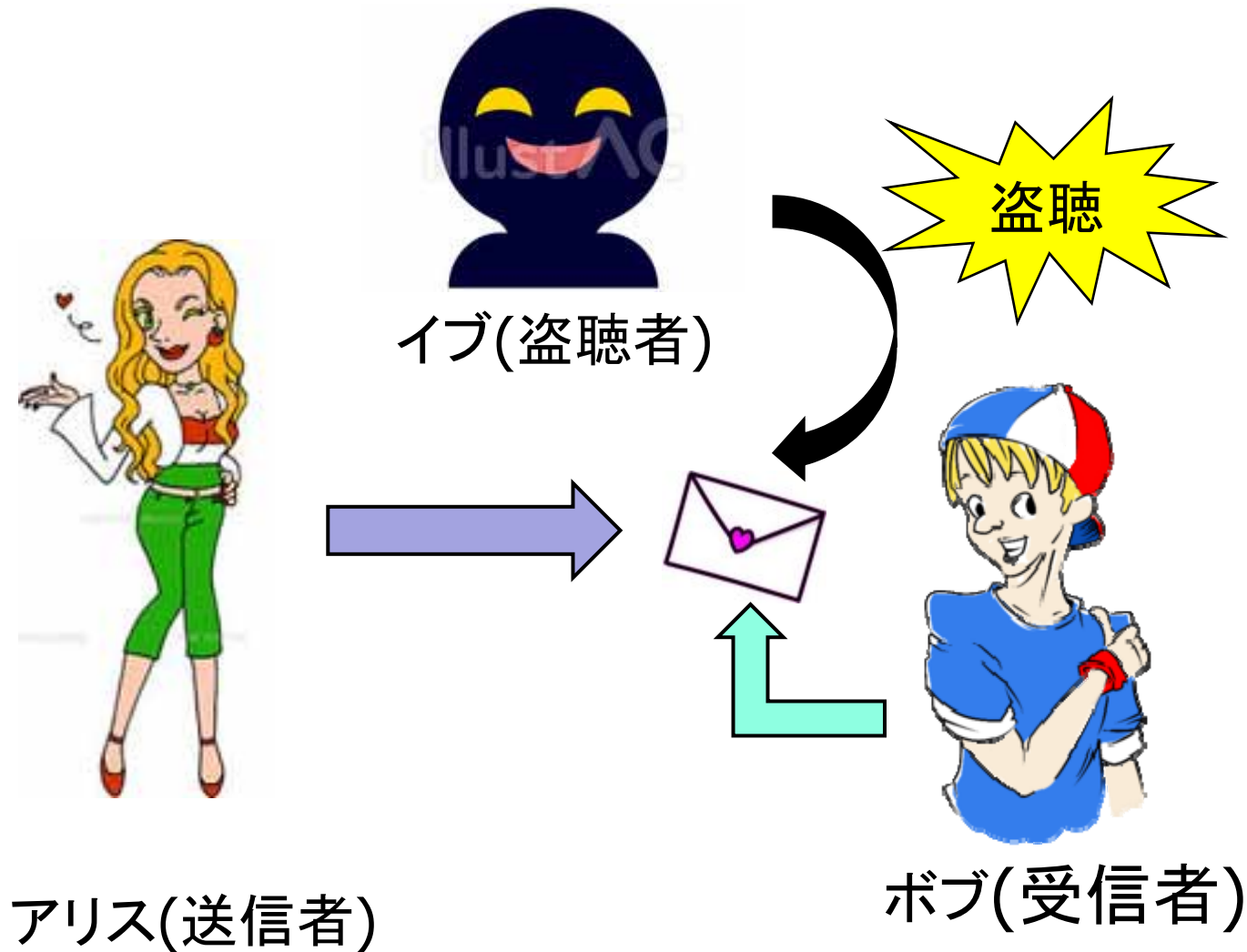


ボブ(受信者)

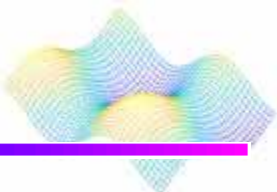
BB84プロトコル



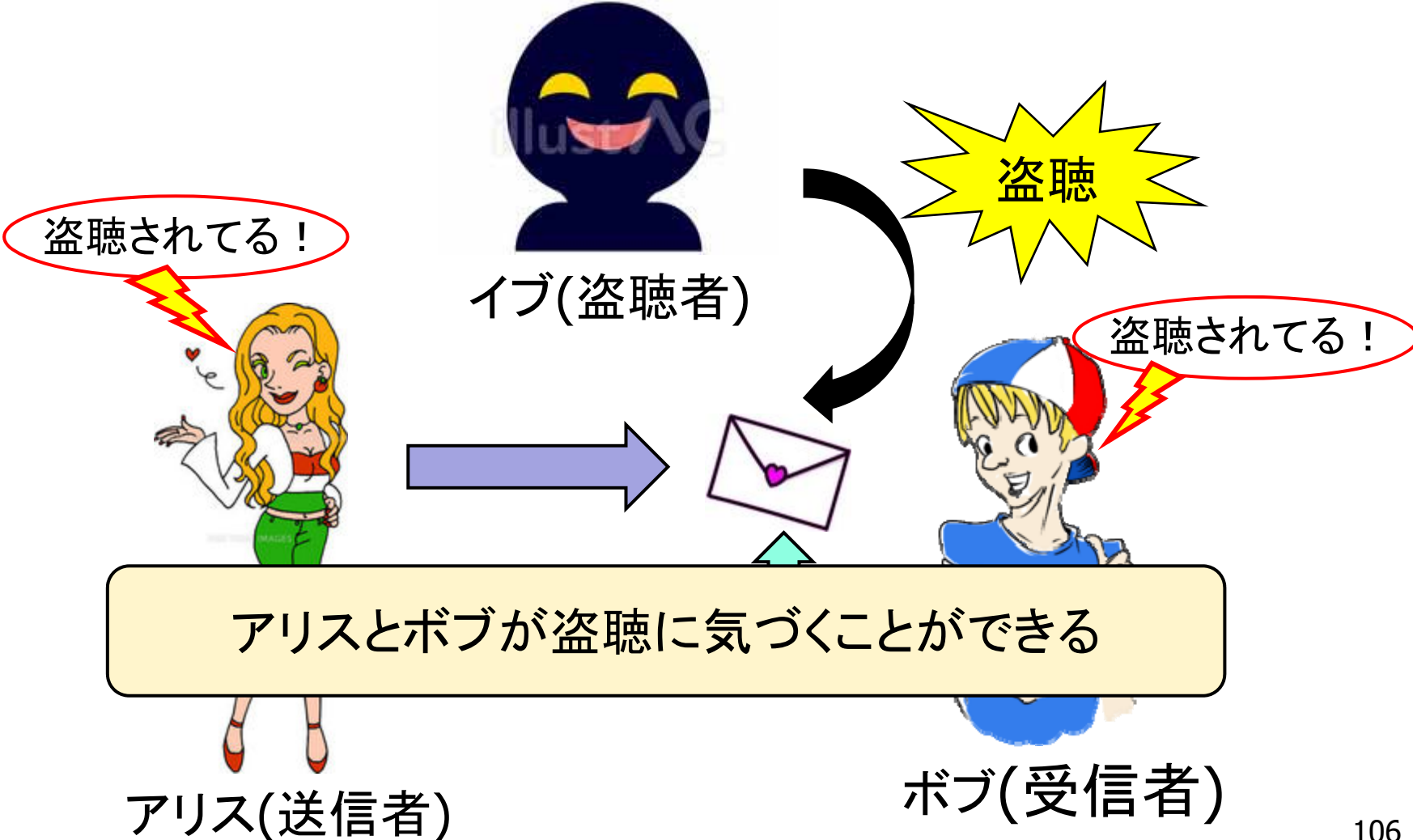
BB84プロトコル... チャールズ・ベネット(Charles Bennett),
ジル・ブラッサード(Gilles Brassard)が1984年に発明



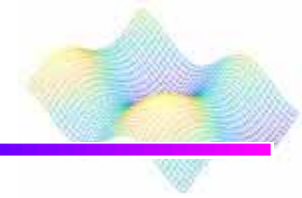
BB84プロトコル



BB84プロトコル... チャールズ・ベネット(Charles Bennett),
ジル・ブラッサード(Gilles Brassard)が1984年に発明



BB84プロトコル



2つの正規直交基底を使用

水平方向スピン: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rightarrow V$ と定義

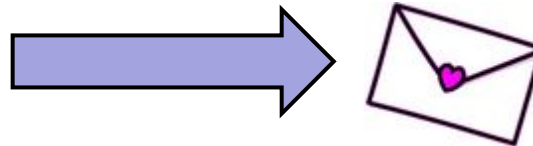
垂直方向スピン: $\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) \rightarrow H$ と定義

ビット0 ビット1

0 or 1
を送信

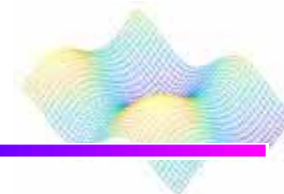


V or H を選択



アリス(送信者)

BB84プロトコル



2つの正規直交基底を使用

水平方向スピン: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \rightarrow V$ と定義

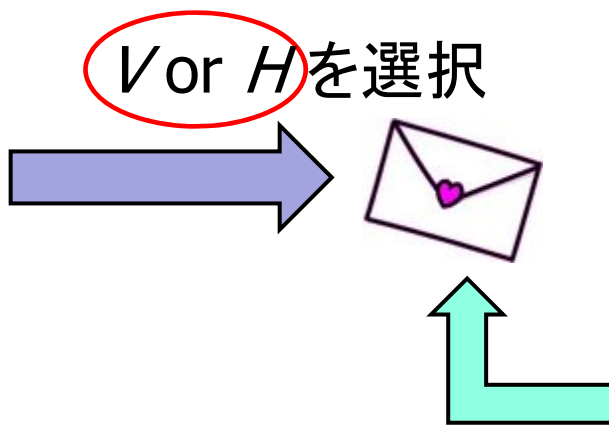
垂直方向スピン: $\left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right) \rightarrow H$ と定義

ビット0 ビット1

0 or 1
を送信



アリス(送信者)



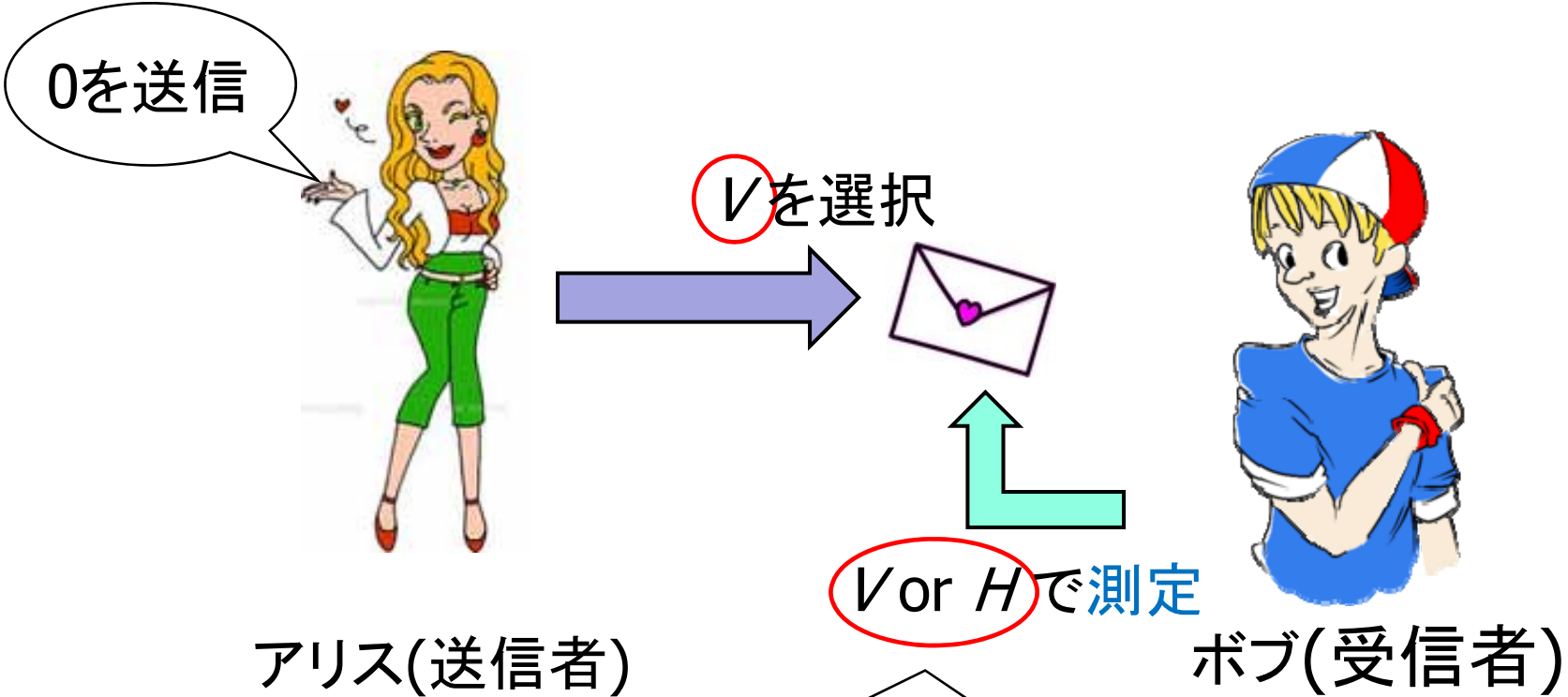
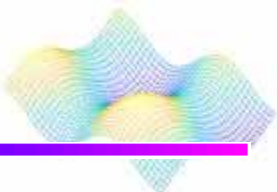
V or H を選択

V or H で測定



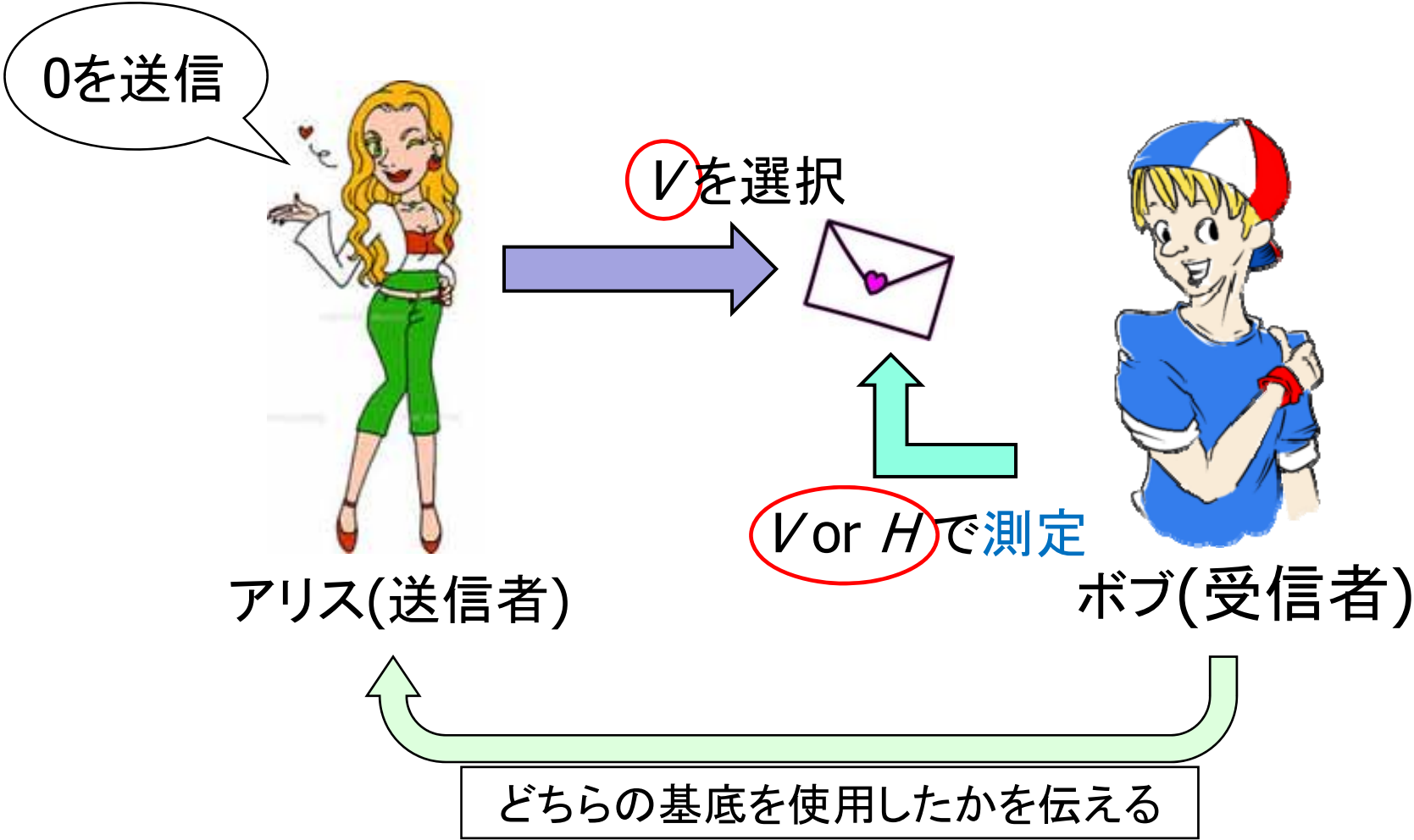
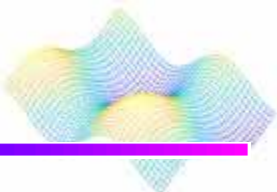
ボブ(受信者)

BB84プロトコル

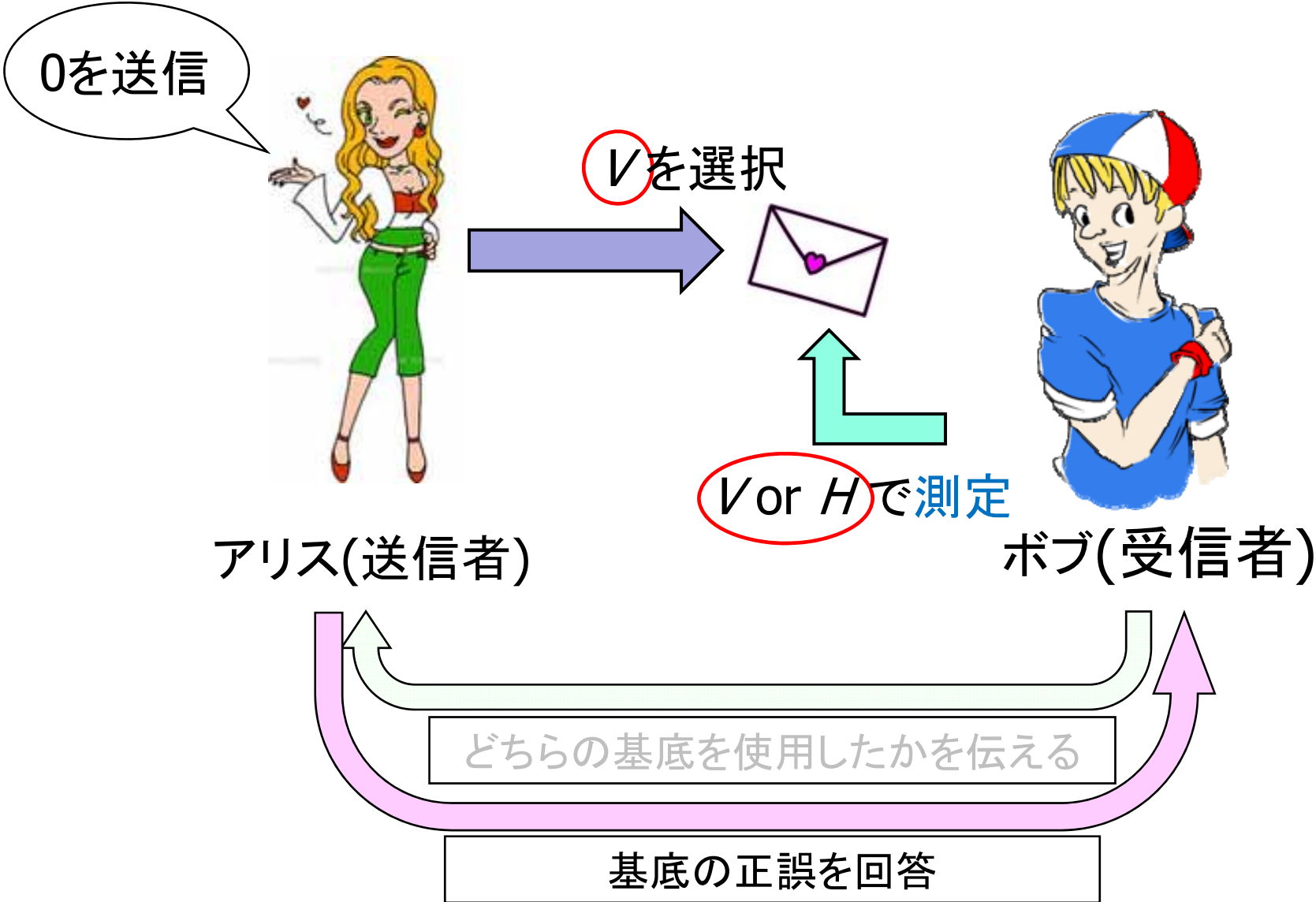
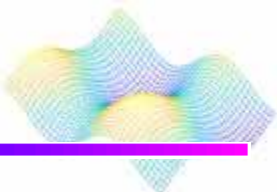


1/2の確立でV or Hが一致
一致→確実に0を受信
不一致→0 or 1を1/2で受信

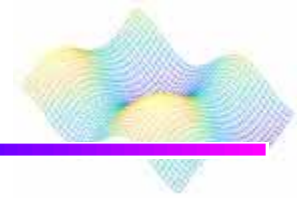
BB84プロトコル



BB84プロトコル



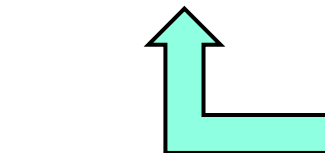
BB84プロトコル



0100101110...
 $4n$ 個送信

この時の文字列を
 V_s, H_s という

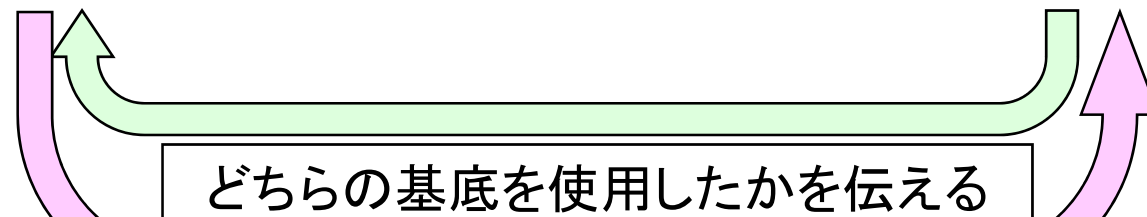
$4n$ 個それぞれ
 V or H を選択



V or H で測定

アリス(送信者)

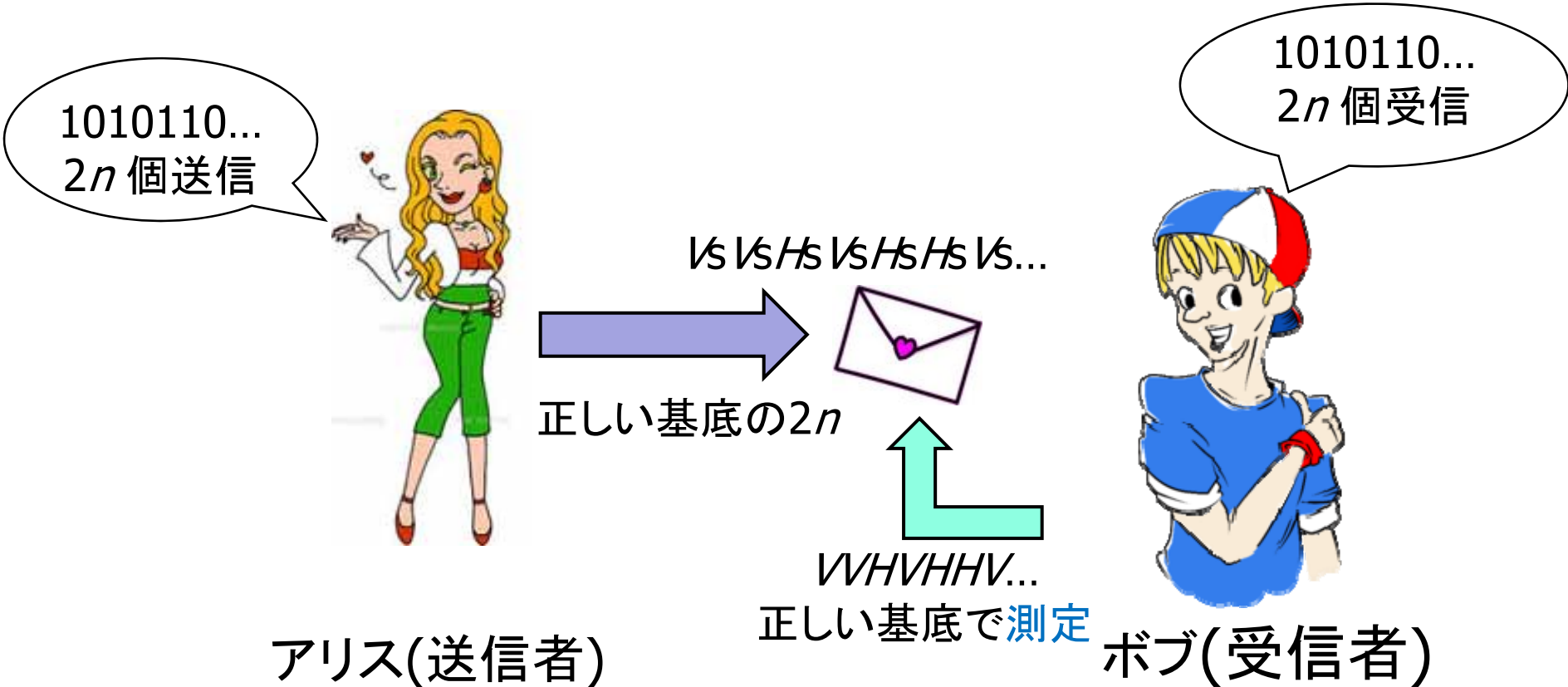
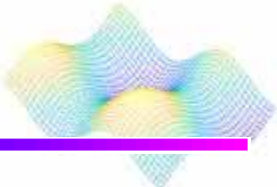
ボブ(受信者)



どちらの基底を使用したかを伝える

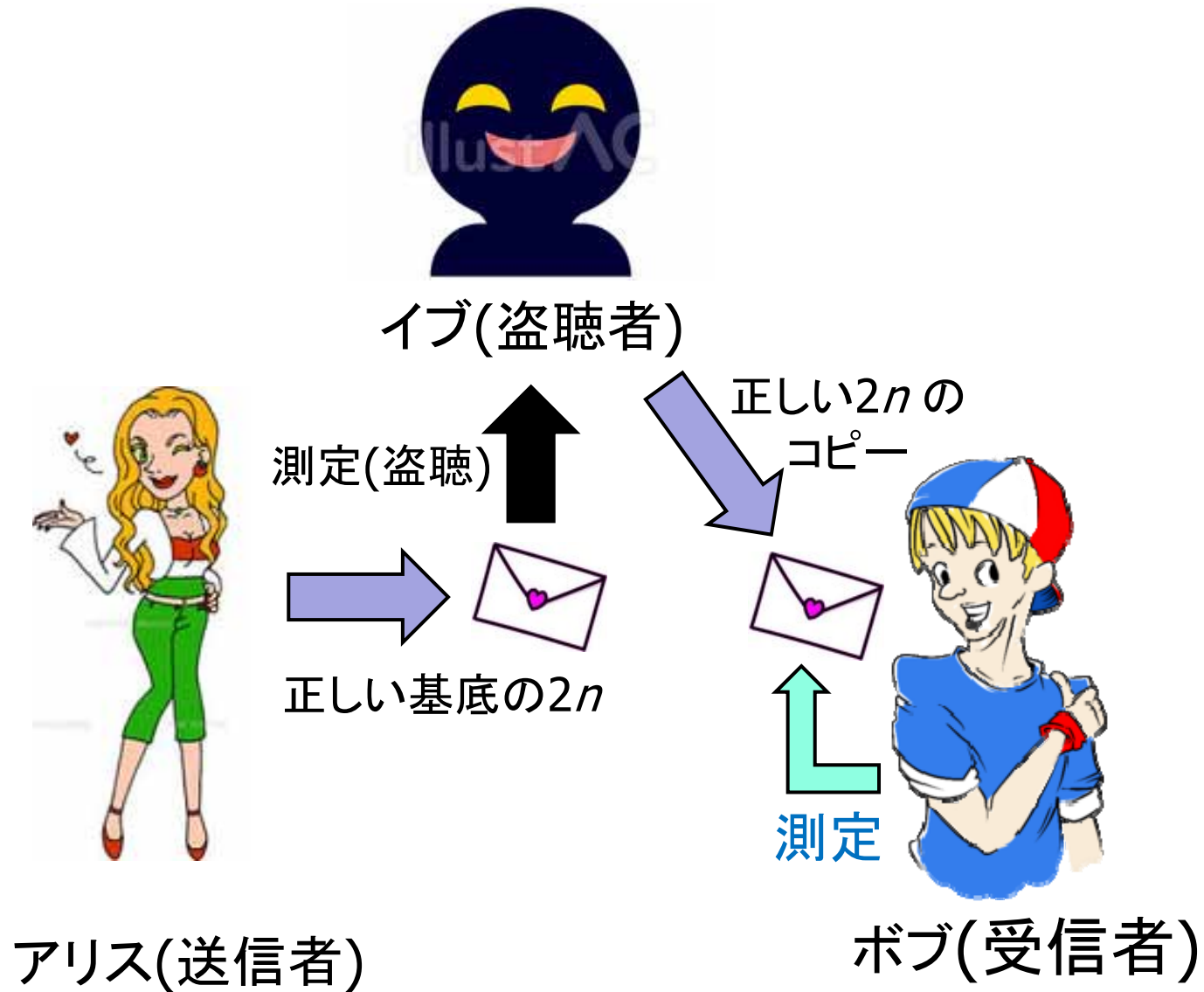
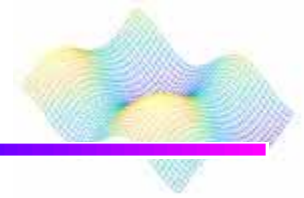
間違った基底の $2n$ を破棄し, 正しい基底の $2n$ を共有
基底の正誤を回答

BB84プロトコル

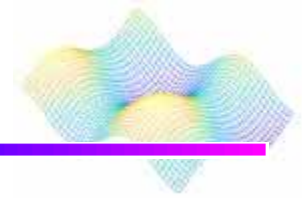


ここからは、正しい基底の2nを送受信

BB84プロトコル



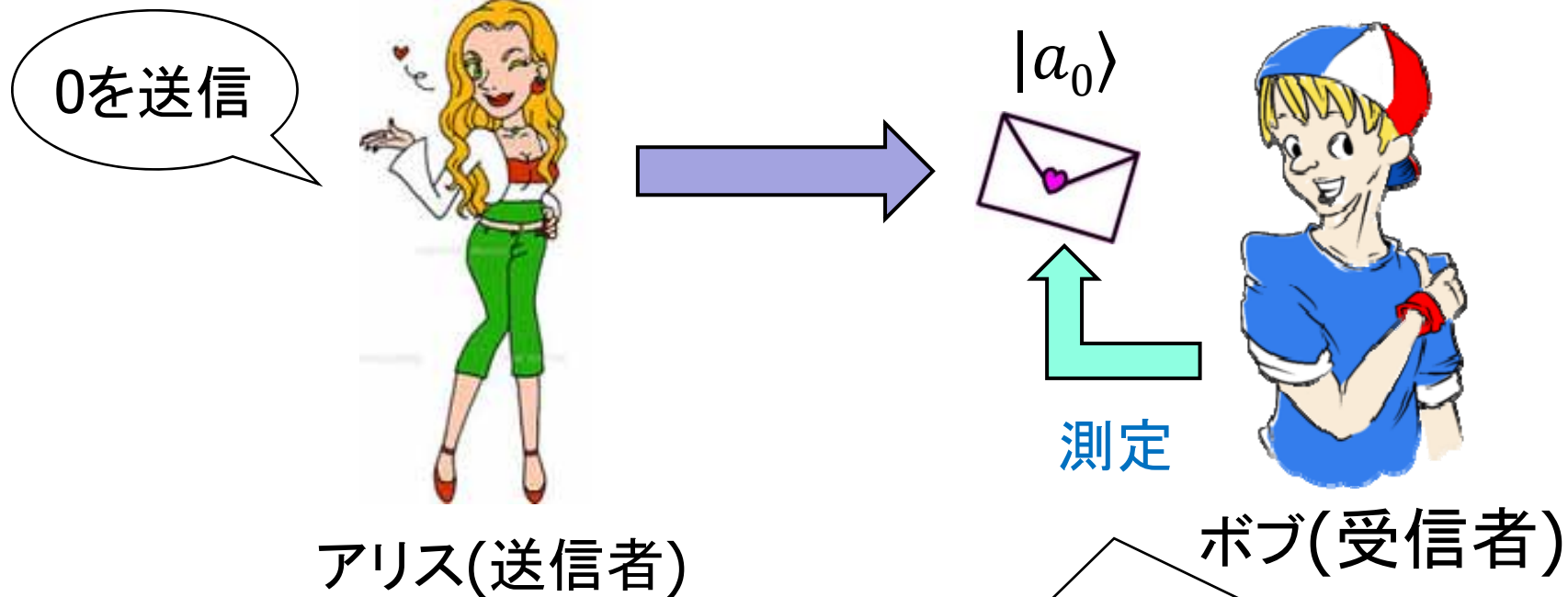
BB84プロトコル



- 量子ビットの送受信には、正規直交基底を使用

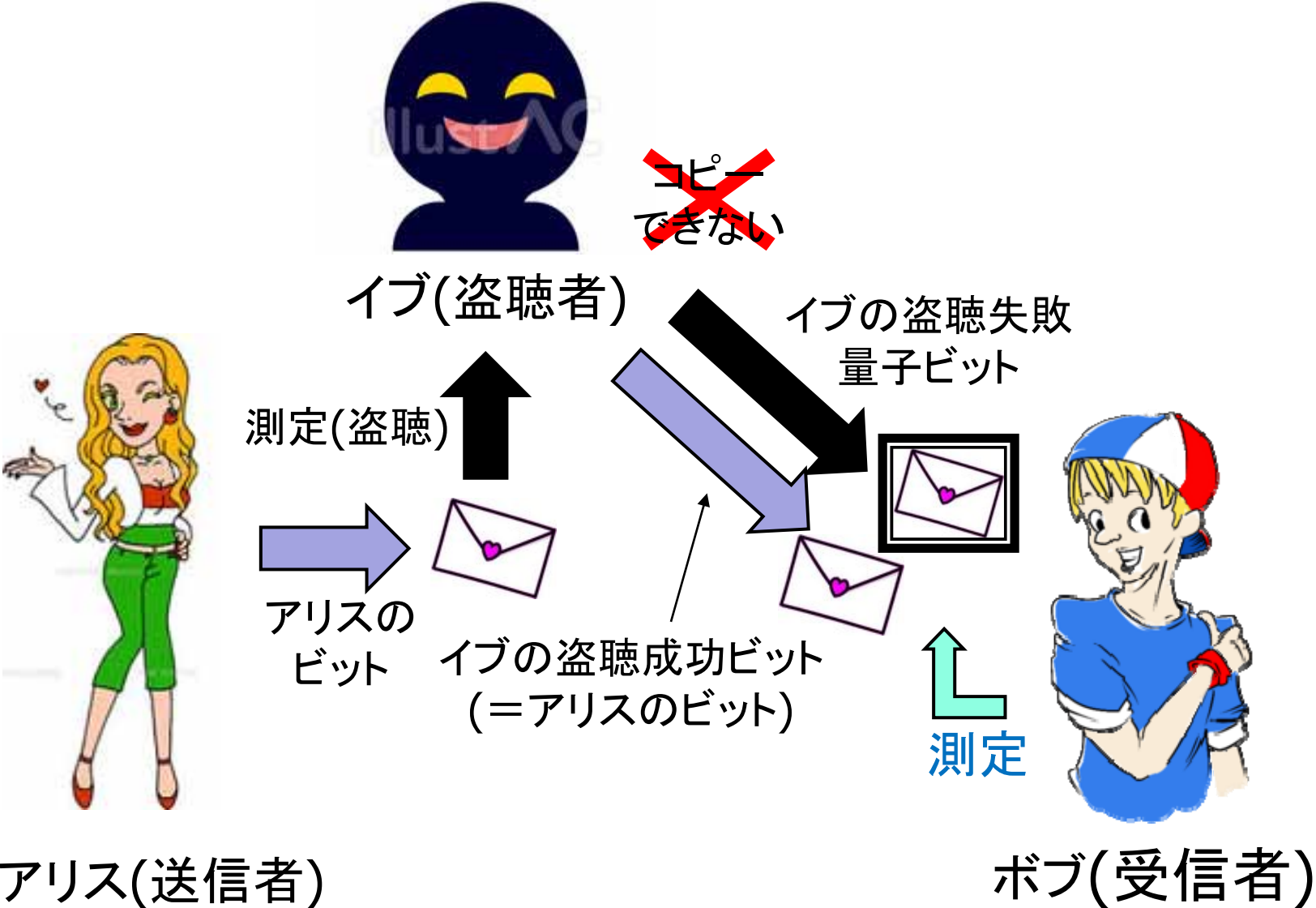
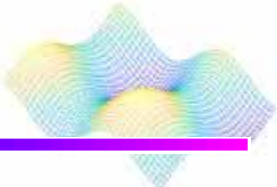
アリス: $(|a_0\rangle, |a_1\rangle)$

ボブ : $(|b_0\rangle, |b_1\rangle)$

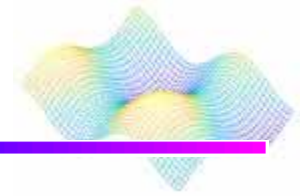


測定結果: $|a_0\rangle = d_0|b_0\rangle + d_1|b_1\rangle$
 d_0^2 の確立で $|b_0\rangle$ となり, 0を受信
 d_1^2 の確立で $|b_1\rangle$ となり, 1を受信

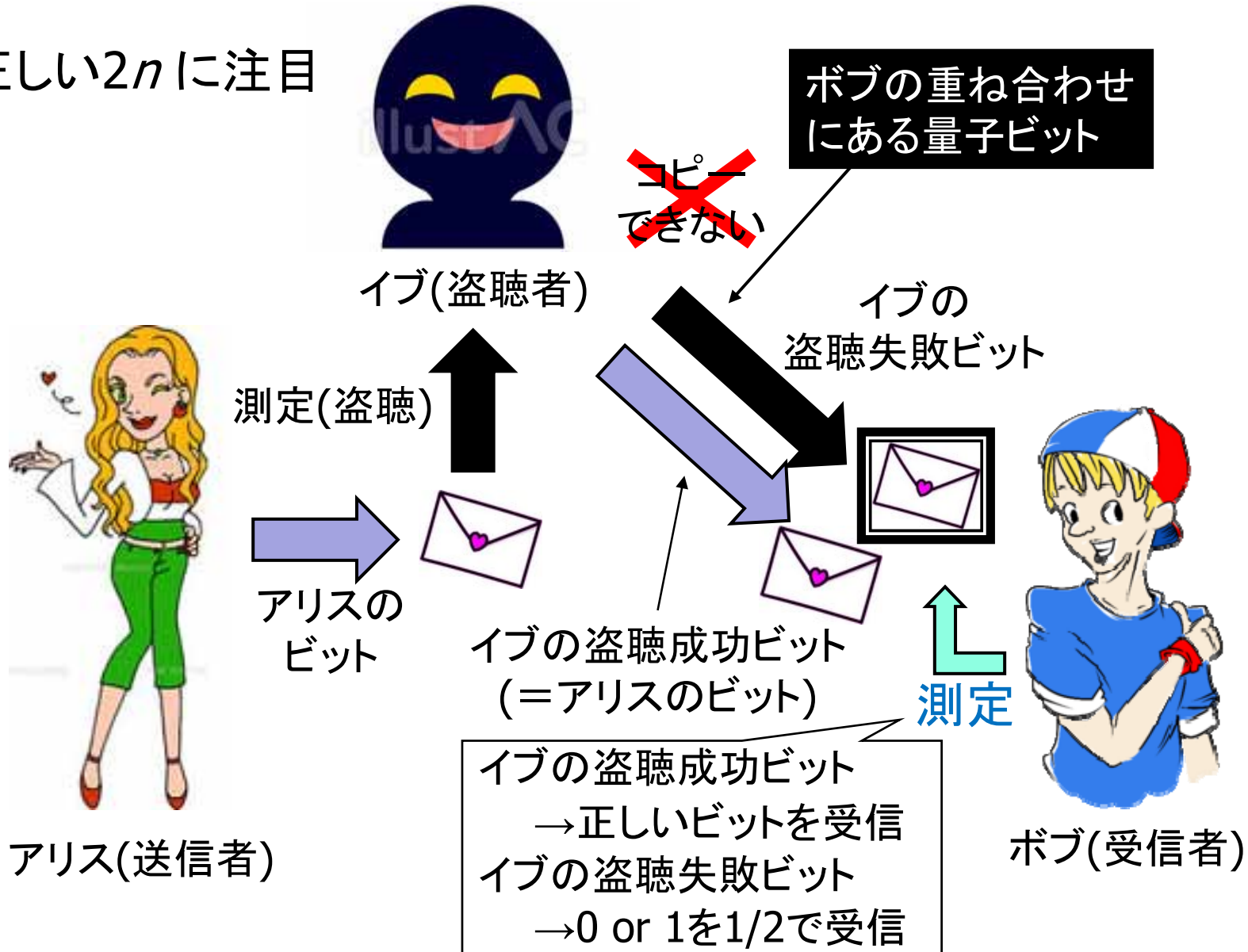
BB84プロトコル



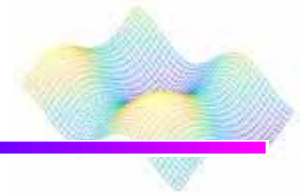
BB84プロトコル



正しい $2n$ に注目



BB84プロトコル



イブの盗聴成功ビット
→正しいビットを受信
イブの盗聴失敗ビット
→0 or 1を1/2で受信

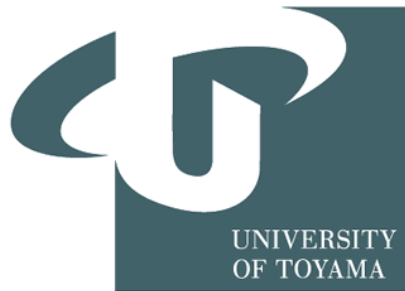
測定



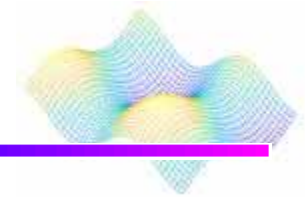
$2n$ 個の文字列の半分を暗号化されていない回線で比較

- ・アリスとボブの文字列が一致していれば, 盗聴されていない
→ n ビットを量子鍵として使用可能
- ・アリスとボブの文字列の1/4が一致しない場合, イブの盗聴に気づくことができる
→コミュニケーションを保護する別の方法を見つける
ことが必要

4章 量子もつれ



量子もつれ1



アリス



ボブ



$$|v\rangle = c_0|a_0\rangle + c_1|a_1\rangle$$

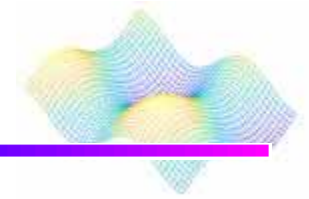
$$|w\rangle = d_0|b_0\rangle + d_1|b_1\rangle$$



$$|v\rangle \otimes |w\rangle = (c_0|a_0\rangle + c_1|a_1\rangle) \otimes (d_0|b_0\rangle + d_1|b_1\rangle)$$

$$|v\rangle |w\rangle = c_0d_0|a_0\rangle|b_0\rangle + c_0d_1|a_0\rangle|b_1\rangle + c_1d_0|a_1\rangle|b_0\rangle + c_1d_1|a_1\rangle|b_1\rangle$$

量子もつれ2



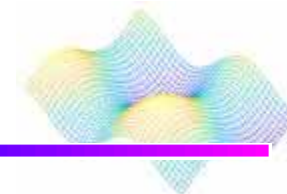
$$|v\rangle |w\rangle = c_0 d_0 |a_0\rangle |b_0\rangle + c_0 d_1 |a_0\rangle |b_1\rangle + c_1 d_0 |a_1\rangle |b_0\rangle + c_1 d_1 |a_1\rangle |b_1\rangle$$

アリスとボブのもつ未知の状態の量子の式の係数の2乗は量子の状態を表し
それぞれを掛け合わせた $c_0 d_0$ の2乗は $|a_0\rangle |b_0\rangle$ になる確率を示す

全ての係数の2乗を足すと1になる

$c_0 d_0 = r, c_0 d_1 = s, c_1 d_0 = t, c_1 d_1 = u$ とすると
 $ru = st$ の時量子はもつれていなく、
 $ru \neq st$ の時量子はもつれている

量子もつれ3



$$1/2\sqrt{2}|a_0\rangle|b_0\rangle + \sqrt{3}/2\sqrt{2}|a_0\rangle|b_1\rangle + 1/2\sqrt{2}|a_1\rangle|b_0\rangle + \sqrt{3}/2\sqrt{2}|a_1\rangle|b_1\rangle$$

もつれのない量子ビットを上式と仮定すると
 $ru=st$ が $\sqrt{3}/8$ となるので量子はもつれていないことが分かる
上式を括って

$$(1/\sqrt{2}|a_0\rangle + 1/\sqrt{2}|a_1\rangle)(1/2|b_0\rangle + \sqrt{3}/2|b_1\rangle)$$

ボブの測定はアリスともつれていない場合、
一つの測定値は絶対値になり、
他のキュービットには全く影響しないが、
もつれている場合は異なり影響を及ぼす。

Spin and Qubits


P61 ~ 63 18行



スピンの確率

$$A^T|\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

電子が90度方向にスピンNを持っている確率が、
90度方向にスピンSを持っている確率に等しいことを示す。



垂直方向のスピンを測定するため、垂直正規基底の線形結合で表すと

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \quad \text{と} \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle \quad \text{となる。}$$

状態ベクトルは

$$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$$

のどちらかにジャンプし、それぞれ2分の1の確率で発生する。
。

垂直方向...

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

水平方向...

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right)$$

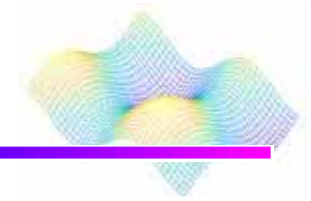


ベルの定理を考えると、120度と240度の基底が必要になる。

絡み合った量子ビット




絡み合った量子ビット




絡み合った光子か電子で表すことができる。

量子からみ合いと量子ビット

からみ合っていない量子ビットの列のイメージ

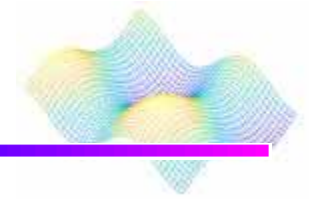


からみ合った量子ビットの列のイメージ



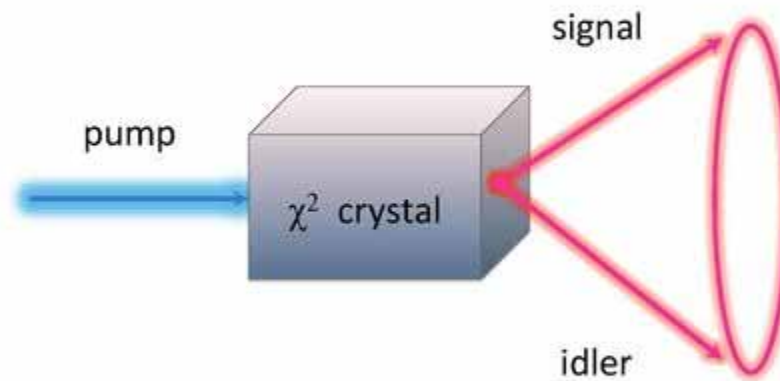
出典:『量子論 増補第4版 (Newton別冊)』、ニュートンプレスをもとに作成

量子ゲートを使って絡み合った量子ビット

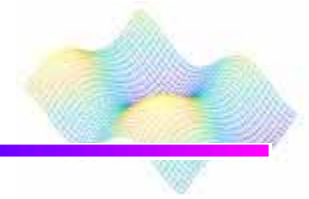


最もよく使われている方法は、光子を使ったもの。

→「自発的パラメトリック・ダウンコンバージョン」
と呼ばれるプロセス。



自発的パラメトリック・ダウンコンバージョン



レーザービームが光子を特殊な結晶の中に送り込む。

→ほとんどの光子はそのまま通過する。

→一部の光子は2つに分裂する。

エネルギーと運動量は保存される。

保存則より、2つの光子の偏光を記述する状態が絡み合っていることを保証している。

絡まった量子時計



電子のスピン

1



原子のk核の
配置

・原子の内側の電子はスピンのキャンセルされるように絡み合っている。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

実験の際,はるかに離れた粒子が絡み合うことが必要



環境との相互作用なしで近くで絡み合った
電子を分離することは**困難**

➡ 一方、絡み合った光子は測定が**困難**

実験方法

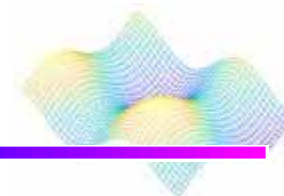
- ・1.3km離れた2つのダイヤモンドを配置
- ・炭素原子の構造を窒素原子によって変化させ、欠陥を製造
- ・レーザーによって、ダイヤモンドの電子を励起

➡ 放出された光子は放出された電子と絡まっていた

- ・次に、ビームスプリッタを使用し、光ファイバーを介した光子を合流させ光子を絡めた

➡ 結果、二つの電子がお互い絡まっていた

CNOTゲート



CNOTゲートの原理

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A blue curved arrow points from the third column vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ to the fourth column vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

例

ゲートを介して
キュービットを送信

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CNOTゲート

例の式を書き直すと $\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- 量子コンピュータでは絡まっていないキュービットをCNOTゲートを使用して絡まらせる

0に対応した $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ or 1に対応した $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

\rightarrow どちらかを選択し取得することができる利点がある

絡み合った量子時計

1

Q. 手が特定の方向を向いているかを尋ねる

A. 時計はあっているか逆向きであるかを答える

もつれた状態 $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

12時 $\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

6時 $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

量子時計の比喩

1

シナリオ1

- ① 自分時計100個、もう一人にパートナー100人を用意
- ② 手は12時を向いていますか？と質問
- ③ YES=1,NO=0と記入する
- ④ 終わったらお互いに比較し一致を確認する

シナリオ2

- ① 自分時計100個、もう一人に時計100個を用意
- ② 30分間交代で、手は12時を向いていますか？と質問
- ③ 残りの30分間はお互いに電話で時計の答えを確認

量子時計の比喩

1

二つの実験の結果は同じになる



自分の測定値が相手の測定値に影響を与えていたと
結論付けることができるか？

- もう一人が不正にデータ収集をしていた場合
 - ➔ 電話ではデータを確認するだけなので、不正なデータかどうかわからない

この結果は因果関係はなく、相関関係である

量子時計の比喩

1

- ・自分ともう一人が絡み合った量子時計のペアを持っていて、
お互いに電話で話している場合、

質問する前 ➡ 手は12or6どちらに向いているかわからない、
絡まっている状態

質問した後 ➡ どちらかの答えが決定するが、もう一つの答え
は得ることができなくなる



この現象が**不気味**である。